Séries entières

Rayon et domaine de convergence

Exercice 1 [00971] [correction]
Déterminer le rayon de convergence des séries entières

$$\text{a) } \sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2+1}{3^n}z^n$$

$$\text{b) } \sum_{n\geqslant 0}\mathrm{e}^{-n^2}z^n$$

$$\text{c) } \sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln n}{n^2}z^{2n}$$

$$\text{d) } \sum_{n\geqslant 0}\frac{n^n}{n!}z^{3n}$$

Exercice 2 [03054] [correction]
Déterminer le rayon de convergence de

$$\text{a) } \sum_{n\geqslant 0}n!z^n \text{ b) } \sum_{n\geqslant 0}\binom{2n}{n}z^n$$

$$\text{c) } \sum_{n\geqslant 0}\frac{(3n)!}{(n!)^3}z^n\text{d) } \sum_{n\geqslant 0}\left(\sqrt[n+1]{n+1}-\sqrt[n]{n}\right)z^n$$

Exercice 3 [00972] [correction]
Déterminer le rayon de convergence des séries entières

$$\text{a) } \sum_{n\geqslant 0}z^{n^2}$$

$$\text{b) } \sum_{n\geqslant 0}\sin(n)z^n$$

$$\text{c) } \sum_{n\geqslant 0}\frac{\sin n}{n^2}z^n$$

Exercice 4 [00973] [correction]
Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes : $\sum\limits_{n\geqslant 1}d(n)z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}s(n)z^n$ où $d(n)$ et $s(n)$ désignent respectivement le nombre de diviseurs supérieurs à 1 de l'entier n et la somme de ceux-ci.

Exercice 5 [00974] [correction]
Soit $\sum a_nz^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Déterminer le rayon de convergence de la série entière$\sum a_nz^{2n}$.

Exercice 6 [00975] [correction]
On suppose que $\sqrt[n]{|a_n|}\to\ell\in\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_nz^n$.

Exercice 7 [00976] [correction]
Soit $\sum a_nz^n$ une série entière de rayon de convergence R. On pose

$$b_n=\frac{a_n}{1+|a_n|}$$

et on note R' le rayon de convergence de $\sum b_nz^n$.
a) Montrer que $R'\geqslant\max(1,R)$
b) Etablir que si $R'>1$ alors $R'=R$.
c) Exprimer R' en fonction de R.

Exercice 8 [00977] [correction]
Soient $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_nz^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z_0\in\mathbb{C}$. On suppose que $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_nz_0^n$ est semi-convergente. Déterminer R.

Exercice 9 [00978] [correction]
Montrer que pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ les séries entières $\sum a_nz^n$ et $\sum n^\alpha a_nz^n$ ont même rayon de convergence.

Exercice 10 [00979] [correction]
Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_a et R_b.
On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n b_n = 0$.
Montrer que le rayon de convergence de $\sum (a_n + b_n) z^n$ est $R = \min(R_a, R_b)$

Exercice 11 Mines-Ponts MP [02841] [correction]
On note a_n la $n$ème décimale de $\sqrt{3}$.
Quel est l'intervalle de définition de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$?

Exercice 12 Mines-Ponts MP [02842] [correction]
Quel est le rayon de convergence de $\sum \pi^{\sqrt{n^2+2n}} x^{2n}$?

Exercice 13 Mines-Ponts MP [02843] [correction]
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Quel est le rayon de convergence de $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{\cos(n\alpha)}{n} x^n$?

Exercice 14 Mines-Ponts MP [02846] [correction]
Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{n!}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)}$. Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Exercice 15 Mines-Ponts MP PC [02855] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$I_n = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^n}\, \mathrm{d}t$$

a) Déterminer la limite de (I_n).
b) Donner un équivalent de (I_n).
c) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général $I_n x^n$.
Etudier sa convergence en R et en $-R$.

Exercice 16 [03016] [correction]
Soit

$$I(p,q) = \int_0^1 t^p (1-t)^q \mathrm{d}t$$

a) Calculer $I(p,q)$.
b) La série de terme général $u_n = I(n,n)$ est-elle convergente ou divergente ?
c) Donner le domaine de définition de $\sum u_n x^n$.

Etude de la somme d'une séries entières

Exercice 17 [00980] [correction]
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f.
a) Exprimer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n}$ en fonction de f pour $|z| < R$.
b) Même question avec $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{3n} z^{3n}$.

Exercice 18 [00981] [correction]
Soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

la somme d'une série entière de rayon de convergence 1.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \text{ et } g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$$

a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant g.
b) Pour tout $x \in]-1,1[$, exprimer $g(x)$ en fonction de $f(x)$.

Exercice 19 [00982] [correction]
Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs. On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ et on suppose

$$S_n \to +\infty \text{ et } a_n/S_n \to 0$$

Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$ et $\sum\limits_{n \geqslant 0} S_n x^n$ puis former une relation entre leur somme.

Exercice 20 [00983] [correction]
Soit (a_n) une suite non nulle et T périodique (avec $T \in \mathbb{N}^\star$).
a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$.
b) Simplifier $\sum\limits_{k=0}^{nT-1} a_k x^k$. En déduire que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est, pour tout $x \in]-1,1[$, une fraction rationnelle en x.

Exercice 21 [00984] [correction]
Soit $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R>0$.
On suppose qu'il existe $\alpha>0$ tel que sur $[0,\alpha]$ on ait $S(x)=0$.
Montrer que $S=0$.

Exercice 22 Mines-Ponts MP [02844] [correction]
a) Soit (a_n) une suite complexe. On suppose que $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence R. Déterminer les rayons de convergence de $\sum (a_n \ln n) x^n$ et $\sum \left(a_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n$.
b) Donner un équivalent simple de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln n\, x^n$ quand $x \to 1^-$.

Exercice 23 Mines-Ponts MP [02854] [correction]
Soit une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R>0$ et de somme $f(z)$.
a) Montrer que pour $0<r<R$, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 \,\mathrm{d}\theta$.
b) Que dire de f si $|f|$ admet un extremum local en 0 ?
c) On suppose maintenant que $R=+\infty$ et qu'il existe $P\in\mathbb{R}_N[X]$ tel que $|f(z)|\leqslant P(|z|)$ pour tout z complexe. Montrer que $f\in\mathbb{C}_N[X]$.

Exercice 24 Mines-Ponts MP [02856] [correction]
Soient $B=\{z\in\mathbb{C}, |z|\leqslant 1\}$ et f une fonction continue de B dans $\mathbb{C}$ dont la restriction à B° est somme d'une série entière. Montrer qu'il existe une suite $(P_k)_{k\geqslant 0}$ de polynôme convergeant uniformément vers f sur B.

Exercice 25 [03067] [correction]
Soit (u_n) une suite réelle bornée et pour $n\in\mathbb{N}$

$$S_n=\sum_{k=0}^{n} u_k$$

a) Quels sont les rayon de convergence des séries entières

$$\sum \frac{u_n}{n!}x^n \text{ et } \sum \frac{S_n}{n!}x^n ?$$

b) On note u et S leurs sommes respectives. Former une relation entre S, S' et u'.
c) On suppose que la suite (S_n) converge vers un réel ℓ. Déterminer

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} S(x)$$

d) Dans cette question, on choisit $u_n=(-1)^n$. Déterminer

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} S(x)$$

Exercice 26 Centrale PC [03201] [correction]
Soit

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$$

a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.
b) Etudier la convergence en $-R$ et en R.
c) Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x\to 1^-$.
d) Montrer que quand $x \to 1^-$

$$(1-x)f(x)\to 0$$

Continuité en une extrémité de l'intervalle de convergence

Exercice 27 [03245] [correction]
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R=1$ avec

$$\forall n\in\mathbb{N}, a_n\geqslant 0$$

Pour $x\in\left]-1,1\right[$, on pose

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

et on suppose que la fonction S est bornée.
a) Montrer que la série $\sum a_n$ est convergente.
b) Montrer que

$$\lim_{x\to 1^-} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Exercice 28 [03246] [correction]
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$ et de somme

$$x \in]-1,1[\mapsto f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

On suppose que la série numérique $\sum a_n$ converge, montrer que la fonction f est définie et continue en 1.

Exercice 29 Centrale MP [03244] [correction]
Soit f la fonction somme dans le domaine réel d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R = 1$.
On suppose l'existence d'un réel

$$\ell = \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

a) Peut-on affirmer que la série numérique $\sum a_n$ converge et que sa somme vaut ℓ ?
b) Que dire si l'on sait de plus $a_n = o(1/n)$? [Théorème de Tauber]

Equivalent en une extrémité de l'intervalle de convergence

Exercice 30 [03068] [correction]
Soit I l'ensemble des réels x tels que la série entière

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$$

converge. On note $f(x)$ la somme de cette série entière.
a) Déterminer I.
b) On pose

$$a_1 = -1 \text{ et } a_n = -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \text{ pour } n \geqslant 2$$

Déterminer le domaine de définition de

$$g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

c) Trouver une relation entre f et g.
d) Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 1^-$.
e) Donner la limite de $f(x)$ quand $x \to -1^+$

Exercice 31 Mines-Ponts MP [02853] [correction]
On pose

$$a_n = \int_n^{+\infty} \frac{\operatorname{th} t}{t^2} \,\mathrm{d}t$$

pour $n \in \mathbb{N}^\star$.
a) Etudier la convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$entière pour x réel.
On note $f(x)$ la somme de cette série entière.
b) La fonction f est-elle continue en -1 ?
c) Donner un équivalent simple de f en 1^-.

Exercice 32 Mines-Ponts MP [02852] [correction]
Domaine de définition et étude aux bornes de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n$$

Exercice 33 [00985] [correction]
Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de sommes respectives $f(x)$ et $g(x)$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n > 0$.
On suppose que le rayon de convergence de $\sum b_n x^n$ est R et que cette série diverge en R.
a) On suppose que $a_n = o(b_n)$. Montrer que $f(x) = o(g(x))$ quand $x \to R^-$.
b) On suppose que $a_n \sim b_n$. Que dire de $f(x)$ et $g(x)$ au voisinage de R ?

Exercice 34 Centrale MP [02452] [correction]
Soit (p_n) une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que $n = o(p_n)$.
On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{p_n}$$

a) Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum x^{p_n}$ et étudier la limite de $(1-x)f(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.
b) Ici $p_n = n^q$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $q \geqslant 2$. Donner un équivalent simple de f en 1.

Exercice 35 Centrale MP [02483] [correction]
Soit $\alpha > -1$.
a) Donner le rayon de convergence R de

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha x^n$$

On désire trouver un équivalent de f_α lorsque $x \to R^-$.
b) On suppose que α est un entier p.
Calculer f_0, f_1. Donner avec un logiciel de calcul formel l'expression de $f_2, \dots, f_5$.
Trouver les équivalents recherchés.
Montrer qu'il existe $Q_p \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$f_p(x) = \frac{Q_p(x)}{(1-x)^{p+1}}$$

(on calculera f_p'). En déduire l'équivalent recherché.
c) On suppose $\alpha > -1$ quelconque.
Donner le développement en série entière de

$$\frac{1}{(1-x)^{1+\alpha}}$$

On notera b_n ses coefficients.
Montrer qu'il existe $A(\alpha) > 0$ tel que $n^\alpha \sim A(\alpha) b_n$. On étudiera la nature de la série de terme général

$$\ln \frac{(n+1)^\alpha}{b_{n+1}} - \ln \frac{n^\alpha}{b_n}$$

En déduire que $f_\alpha(x)$ est équivalente à

$$\frac{A(\alpha)}{(1-x)^{1+\alpha}}$$

quand x tend vers R^-.

Fonctions développables en série entière

Exercice 36 [00992] [correction]
Soient $a > 0$ et $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour laquelle il existe $A, K > 0$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\left\| f^{(n)} \right\|_\infty \leqslant K n! A^n$$

Montrer que f est développable en série entière en 0.

Exercice 37 Centrale MP [03303] [correction]
Soit $f :]-R, R[\to \mathbb{R}$ (avec $R > 0$) de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, R[\,, f^{(n)}(x) \geqslant 0$$

Montrer la convergence de la série

$$\sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$$

pour tout $x \in]-R, R[$.

Exercice 38 [00993] [correction]
[Fonction absolument monotone]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f^{(n)} \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que f est développable en série entière en 0.

Exercice 39 [00994] [correction]
Soient $a > 0$ et $f :]-a, a[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f^{(n)} \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que f est égale à la somme de sa série de Taylor en 0.

Exercice 40 Mines-Ponts MP [02851] [correction]
Soient $a > 0$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(]-a, a[\,, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-a, a[\,, f^{(n)}(x) \geqslant 0$$

a) Si $|x| < r < a$, montrer

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leqslant \left| \frac{x}{r} \right|^{n+1} f(r)$$

b) Montrer que f est développable en série entière sur $]-a, a[$.
c) Montrer que $x \mapsto \tan x$ est développable en série entière sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Exercice 41 Centrale MP [03302] [correction]
Etablir que la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1 - \mathrm{sh} x}$$

est développable en série entière et préciser le rayon de convergence.

Développement en séries entières

Exercice 42 [00986] [correction]
Former le développement en série entière en 0 de la fonction

$$x \mapsto \ln(x^2 - 5x + 6)$$

Exercice 43 [00987] [correction]
Former le développement en série entière en 0 de la fonction

$$x \mapsto \ln(x^2 + x + 1)$$

Exercice 44 [00988] [correction]
Soient $a, b > 0$ avec $a \neq b$.
Calculer c_n, le $n$ème coefficient du développement en série entière en 0 de $x \mapsto \frac{1}{(1-ax)(1-bx)}$. Exprimer $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2 x^n$.

Exercice 45 [00989] [correction]
Pour $t \in \left]0, \pi\right[$, former le développement en série entière en 0 de la fonction

$$x \mapsto \frac{1 - x^2}{1 - 2x\cos t + x^2}$$

Exercice 46 [00990] [correction]
Former le développement en série entière de $\frac{1 - z\cos t}{1 - 2z\cos t + z^2}$ pour $|z| < 1$ et $t \in \left]0, \pi\right[$.

Exercice 47 [00991] [correction]
Pour $\alpha \in \left]0, \pi\right[$, former le développement en série entière en 0 de la fonction

$$f : x \mapsto \arctan\left(\frac{1 + x}{1 - x}\tan\frac{\alpha}{2}\right)$$

Exercice 48 Centrale MP [00995] [correction]
Réaliser le développement en série entière en 0 de $x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + x^2}$ et reconnaître cette fonction.

Exercice 49 [00937] [correction]
Former le développement en série entière en 0 de

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\sin(tx)\,\mathrm{d}t$$

a) en procédant à une intégration terme à terme.
b) en déterminant une équation différentielle dont la fonction est solution.

Exercice 50 Mines-Ponts MP [02848] [correction]
Pour $x \in \left]-1, 1\right[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, établir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\sin(n\alpha) = \arctan\left(\frac{x\sin\alpha}{1 - x\cos\alpha}\right)$$

Exercice 51 Mines-Ponts MP [02857] [correction]
Développer en série entière $x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t + t^2}$.

Exercice 52 Mines-Ponts MP [02858] [correction]
Développer en série entière $f : x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$ au voisinage de 0.

Exercice 53 Mines-Ponts MP [02859] [correction]
a) Montrer, si $t \in \mathbb{R}$: $\left|\mathrm{e}^{it} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!}\right| \leqslant \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}$.
b) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |t^n|\,|f(t)|\,\mathrm{d}t\right)_{n \geqslant 0}$ soit bornée.
Montrer que $F : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{itx} f(t)$ est développable en série entière en 0.

Exercice 54 X MP [02975] [correction]
Etant donné une suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ de carré sommable, on pose $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n - t}$ où la variable t est réelle.
a) Préciser le domaine de définition de f.
b) Montrer que f est développable en série entière autour de 0.
c) Montrer que si f est identiquement nulle sur $[-1/2, 1/2]$, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ est identiquement nulle.

Sommation de séries entières

Exercice 55 [00996] [correction]
Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières :
a) $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}$ b) $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n-1}{n!}x^n$

Exercice 56 [00997] [correction]
Soit $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n$.
a) Déterminer l'intervalle de convergence de f.
b) Exprimer la fonction f à l'aide des fonctions usuelles sur $]-1,1[$
c) Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.

Exercice 57 [00998] [correction]
Rayon de convergence et somme de $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(n+1)(n-2)}{n!}x^n$.

Exercice 58 [00999] [correction]
Rayon de convergence et expression fonctionnelle de $\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{2n}}{2n+1}$.

Exercice 59 [01000] [correction]
Rayon de convergence et expression fonctionnelle de la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n x^n}{2n+1}$$

Exercice 60 [01001] [correction]
Rayon de convergence et expression fonctionnelle de la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{2n}}{4n^2-1}$$

Exercice 61 Centrale MP [02448] [correction]
Pour $n>0$, on pose

$$a_n=\int_0^{\pi/4}\tan^n t\,\mathrm{d}t$$

a) Trouver la limite de (a_n).
b) Trouver une relation simple entre a_{n+2} et a_n.
c) On pose

$$u_n(x)=\frac{a_n}{n^\alpha}x^n$$

Donner la nature de la série de terme général $u_n(x)$ en fonction de x et de a.
d) On pose

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n x^n$$

Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 62 Centrale MP [02449] [correction]
Soit (a_n) la suite définie par

$$a_0=1 \text{ et } a_n=\frac{1}{n!}\int_0^1\prod_{k=0}^{n-1}(t-k)\,\mathrm{d}t \text{ pour } n\in\mathbb{N}^\star$$

a) Rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.
b) Somme de $\sum a_n x^n$.

Exercice 63 Centrale MP [02454] [correction]
Convergence et calcul de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ où $a_n=\int_0^1(1-t^2)^n\mathrm{d}t$.

Exercice 64 Centrale MP [02482] [correction]
On considère les sommes :
$S_1=\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{5\times 7}+\frac{1}{9\times 11}+\cdots$ et $S_2=\frac{1}{1\times 3}-\frac{1}{5\times 7}+\frac{1}{9\times 11}-\cdots$
a) Calculer la première somme avec Maple. Constater qu'il ne calcule pas la deuxième.
b) On cherche à calculer S_2. On note a_n le terme général de cette série. Calculer le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$.
c) Exprimer $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+1}}{4n+1}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+3}}{4n+3}$ pour $x\in\,]-R,R[$.
d) Exprimer S_2 à l'aide d'une intégrale que l'on calculera avec Maple.

Exercice 65 Centrale MP [02484] [correction]
a) Décomposer
$$\frac{1}{1-X^6}$$
en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
b) Calculer
$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^6}$$
quand cette intégrale est bien définie.
c) Calculer, pour $x \in \left]0,1\right[$,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{6n+1}$$
d) Que vaut
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{6n+1}?$$

Exercice 66 Mines-Ponts MP [02845] [correction]
Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{3n+2}$.

Exercice 67 Mines-Ponts MP [02847] [correction]
a) Déterminer le rayon de convergence R de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{n!}{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}x^n$.
b) Pour $x \in \left]-R,R\right[$ calculer la somme précédente.

Applications des développements en séries entières

Exercice 68 [01002] [correction]
a) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer qu'il en est de même de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{\mathrm{e}^x-1}$

Exercice 69 [01003] [correction]
Montrer que $\forall a > 0$,
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1}$$
En déduire les sommes
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Exercice 70 [01004] [correction]
Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

Exercice 71 [01005] [correction]
Montrer que
$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

Exercice 72 [01006] [correction]
Montrer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \int_0^1 \arctan x \,\mathrm{d}x$.
En déduire la valeur de cette somme.

Exercice 73 [01007] [correction]
a) Développer en série entière en 0 la fonction arcsinet préciser le domaine de convergence.
b) En étudiant
$$\int_0^{\pi/2} \arcsin(\sin(t))\,\mathrm{d}t$$
déterminer
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \text{ puis } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Exercice 74 [01008] [correction]
Observer que pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+x\sin^2 t)}{\sin^2 t}\mathrm{d}t = \pi(\sqrt{1+x}-1)$.

Exercice 75 [01009] [correction]
a) Montrer que
$$\gamma=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$
où γ désigne la constante d'Euler.
b) En déduire que
$$\gamma=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\zeta(k)$$

Exercice 76 [01010] [correction]
a) Former le développement en série entière en 0 de
$$x\mapsto\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$$
b) Soit $(u_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant
$$\forall n\in\mathbb{N},u_{n+3}=u_{n+2}+u_{n+1}-u_n$$
Exprimer le terme général de la suite (u_n) en fonction de ses premiers termes.

Exercice 77 Centrale MP [01011] [correction]
On pose $a_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$a_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}a_k$$
a) Donner une formule permettant de calculer
$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$$
b) Calculer $S(x)$.
c) Calculer les a_n.
d) Donner un équivalent de la suite (a_n).

Exercice 78 Centrale MP [02451] [correction]
On note $N(n,p)$ le nombre de permutations de $[\![1,n]\!]$ qui ont exactement p points fixes. On pose en particulier $D(n)=N(n,0)$, puis $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{D(n)}{n!}x^n$.
a) relier $N(n,p)$ et $D(n-p)$.
b) Justifier la définition de f sur $]-1,1[$ puis calculer f.
c) Calculer $N(n,p)$.
d) Etudier la limite de $\left(\frac{1}{n!}N(n,p)\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 79 Mines-Ponts MP PC [02849] [correction]
Si $n\geqslant 1$, soit I_n le nombre d'involutions de $\{1,\dots,n\}$. On convient : $I_0=1$.
a) Montrer, si $n\geqslant 2$, que
$$I_n=I_{n-1}+(n-1)I_{n-2}$$
b) Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{I_n}{n!}x^n$ converge si $x\in\,]-1,1[$. Soit $S(x)$ sa somme.
c) Montrer, pour $x\in\,]-1,1[$, que
$$S'(x)=(1+x)S(x)$$
d) En déduire une expression de $S(x)$ puis une expression de I_n.

Exercice 80 Mines-Ponts MP PC [02850] [correction]
On pose $a_0=1$ puis $a_{n+1}=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_{n-k}a_k$. Calculer les a_n en utilisant la série entière de terme général $\frac{a_n}{n!}x^n$.

Exercice 81 Mines-Ponts MP [02422] [correction]
a) Déterminer la décomposition en éléments simples de
$$\frac{1}{(X+1)^m(X-1)^n}$$
avec m,n deux entiers non nuls.
b) Déterminer deux polynômes U et V tels que
$$(X+1)^mU(X)+(X-1)^nV(X)=1$$

Exercice 82 Centrale MP [03074] [correction]
Soit une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$.
a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum \frac{a_n}{n!} z^n$$

On pose donc, pour t dans $\mathbb{R}$,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$$

b) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x > r$, $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ soit intégrable sur $[0, +\infty[$ et exprimer cette intégrale sous forme de série entière en $1/x$.

Exercice 83 Centrale MP [03106] [correction]
Soient $a \in]0, 1[$ et f_n définie sur $I =]-\infty, 1/a[$ par

$$f_n(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - a^i x}$$

a) Pour $a = 1/2$, tracer, avec Maple, les courbes des fonctions f_n pour $n \in [\![1, 10]\!]$ sur $[-3, 2[$ pour observer le comportement de la suite.
b) Montrer que f_{100} est développable en série entière au voisinage de 0 et donner les valeurs des 20 premiers coefficients de ce développement.
c) Pour a quelconque, montrer que (f_n) converge simplement sur I vers

$$f(x) = \prod_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - a^i x}$$

Trouver une relation simple entre $f(x)$ et $f(ax)$.
d) Montrer l'existence et l'unicité d'une fonction g développable en série entière vérifiant

$$g(0) = 1 \text{ et } \forall x \in I, g(ax) = (1 - ax)g(x)$$

e) Montrer que f est développable en série entière et exprimer, avec Maple, les coefficients de ce développement en fonction de a.

Exercice 84 [00131] [correction]
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
a) Déterminer la limite de la suite de terme général

$$u_n = \int_0^1 n t^n f(t) \,\mathrm{d}t$$

b) Déterminer la limite de

$$v_n = \int_0^1 n \ln(1 + t^n) f(t) \,\mathrm{d}t$$

Exercice 85 Mines-Ponts MP PC [02865] [correction]
Etudier la limite de la suite de terme général

$$I_n = n \int_0^1 \ln(1 + t^n) \,\mathrm{d}t$$

Exercice 86 Mines-Ponts MP [02808] [correction]
Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n + 2) \times 3^n}$$

Séries entières et équations différentielles

Exercice 87 [01013] [correction]
Soient $p \in \mathbb{N}$ et

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} x^n$$

a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant cette fonction.
b) Calculer $f(x)$ en étudiant $(1 - x)f'(x)$.

Exercice 88 [01014] [correction]
Soit f définie sur $]-1, 1[$ par $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.
a) Justifier que f est développable en série entière sur $]-1, 1[$.
b) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(1 - x^2)y' - xy = 1$.
c) Déterminer le développement en série entière de f sur $]-1, 1[$.

Exercice 89 [01015] [correction]
Former le développement en série entière en 0 de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\arccos x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Exercice 90 [01017] [correction]
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \cos(\alpha \arcsin x)$.
a) Déterminer une équation différentielle d'ordre 2 dont f est solution.
b) En déduire un DSE de f.

Exercice 91 [01018] [correction]
Former le développement en série entière en 0 de $x \mapsto \operatorname{sh}(\arcsin x)$.

Exercice 92 Mines-Ponts PC [01019] [correction]
Former de deux façons le développement en série entière en 0 de

$$f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{t^2} \,\mathrm{d}t$$

En déduire la relation

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} \binom{2n}{n} = \frac{4^n}{(2n+1)}$$

Exercice 93 Centrale MP [02481] [correction]
On considère une suite réelle $(u_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant $u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} - (n+2)u_n$ et $u_0 = u_1 = -1$
a) Calculer, avec un logiciel de calcul formel, les 10 premiers termes de la suite.
b) On pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Trouver f à l'aide d'une équation différentielle.
c) On pose $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$. Trouver g à l'aide d'une équation différentielle.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
a) $u_n(z) = \frac{n^2+1}{3^n} z^n$. Pour tout $z \neq 0$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| \to \frac{|z|}{3}$ donc $R = 3$.
b) $u_n(z) = z^n \mathrm{e}^{-n^2}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $n^2 u_n(z) \to 0$ donc $R = +\infty$.
c) $u_n(z) = \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}$. Pour tout $z \neq 0$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{\ln(n+1)}{\ln n}\frac{n^2}{(n+1)^2}|z|^2 \to |z|^2$ donc $R = 1$.
d) $u_n(z) = \frac{n^n}{n!} z^{3n}$. Pour tout $z \neq 0$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{(n+1)^n}{n^n}|z|^3 \to \mathrm{e}\,|z|^3$ donc $R = \mathrm{e}^{-1/3}$.

Exercice 2 : [énoncé]
a) $u_n(z) = n! z^n$. Pour tout $z \neq 0$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = (n+1)|z| \to +\infty$ donc $R = 0$.
b) $u_n(z) = \binom{2n}{n} z^n$. Pour tout $z \neq 0$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}|z| \to 4|z|$ donc $R = 1/4$.
c) $u_n(z) = \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$. Pour tout $z \neq 0$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3}|z| \to 27|z|$ donc $R = 1/27$.
d) $\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}\ln(n+1)} - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n}\left(\mathrm{e}^{\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n}} - 1\right)$ or $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n} \to 1$ donc $\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n} = -\frac{\ln n}{n(n+1)} + \frac{\ln(1+1/n)}{n+1} \sim -\frac{\ln n}{n^2}$.
Par suite $R = 1$.

Exercice 3 : [énoncé]
a) Posons

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a_n) ne tend par vers 0 donc $R \leqslant 1$ mais (a_n) est borné donc $R \geqslant 1$. Finalement $R = 1$.
b) Posons $a_n = \sin n$.
(a_n) ne tend par vers 0 donc $R \leqslant 1$ mais (a_n) est borné donc $R \geqslant 1$. Finalement $R = 1$.
c) Posons $a_n = (\sin n)/n^2$.
(a_n) est bornée donc $R \geqslant 1$.
Pour $|z| > 1$, la suite $\left(\frac{\sin n}{n^2}|z|^n\right)$ ne tend pas vers 0 car la suite $(\sin n)$ ne tend pas vers 0. On en déduit $R \leqslant 1$ et finalement $R = 1$.

Exercice 4 : [énoncé]
$d(n) \not\to 0$ donc $R_d \leqslant 1$ $d(n) \leqslant n$ et le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 1} nz^n$ étant égal à 1 on a aussi $R_d \geqslant 1$. On peut conclure $R_d = 1$.
De même, en exploitant $s(n) \not\to 0$ et $s(n) \leqslant 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ on a $R_s = 1$.

Exercice 5 : [énoncé]
Notons R' le rayon de convergence de $\sum a_n z^{2n}$.
Pour $|z| < \sqrt{R}$, $\left|z^2\right| < R$ et donc $\sum a_n(z^2)^n = \sum a_n z^{2n}$ est absolument convergente.
Pour $|z| > \sqrt{R}$, $\left|z^2\right| > R$ et donc $\sum a_n(z^2)^n = \sum a_n z^{2n}$ est grossièrement divergente.
On en déduit $R' = \sqrt{R}$.

Exercice 6 : [énoncé]
Pour $z \neq 0$, on observe que $\sqrt[n]{|a_n z^n|} \to \ell\,|z|$. Or il est connu que pour $\sum u_n$ série à termes positifs, si $\sqrt[n]{u_n} \to m \in [0,1[$ alors la série converge et si $\sqrt[n]{u_n} \to m > 1$ alors la série diverge (ce résultat s'obtient par comparaison avec une suite géométrique).
Si $\ell = 0$ alors $\forall z \in \mathbb{C}$, $\sqrt[n]{|a_n z^n|} \to 0$ donc $\sum a_n z^n$ converge en z et donc $R = +\infty$.
Si $\ell \in]0,+\infty[$ alors $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1/\ell$, $\sum a_n z^n$ converge tandis que pour $|z| > 1/\ell$, $\sum a_n z^n$ diverge. On en déduit $R = 1/\ell$
Si $\ell = +\infty$ alors $\forall z \in \mathbb{C}^\star$, $\sum a_n z^n$ diverge.

Exercice 7 : [énoncé]
a) On a $|b_n| \leqslant |a_n|$ donc $R' \geqslant R$. On a $|b_n| \leqslant 1$ donc $R' \geqslant 1$
b) Si $R' > 1$ alors $b_n \to 0$ et puisque $|b_n| = \frac{|a_n|}{1+|a_n|}$ donne $|a_n| = \frac{|b_n|}{1-|b_n|}$, on obtient $a_n = O(|b_n|)$ donc $R \geqslant R'$.
Par suite $R = R'$ d'où $R' = \max(1, R)$.
c) Si $R' = 1$ alors $1 \geqslant R$ et $R' = \max(1, R)$.

Exercice 8 : [énoncé]
Par la convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z_0^n$ on a déjà $R \geqslant |z_0|$. Si $R > |z_0|$ alors il y a absolue convergence en z_0 ce qui est exclu par hypothèse. On conclut $R = |z_0|$.

Exercice 9 : [énoncé]
Posons $b_n = n^\alpha a_n$ et comparons R_a et R_b.
Pour $\alpha = 0$: ok
Pour $\alpha > 0$: $a_n = o(b_n)$ donc $R_a \geqslant R_b$.
Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_a$, en considérant, $\rho \in \left]|z|, R_a\right[$,
$n^\alpha a_n z^n = a_n \rho^n \times n^\alpha \frac{z^n}{\rho^n} = o(a_n\rho^n)$ donc $\sum b_n z^n$ converge et par suite $R_b \geqslant |z|$. Or ceci pour tout z tel que $|z| < R_a$ donc $R_b \geqslant R_a$. Finalement $R_a = R_b$.
Pour $\alpha < 0$: $a_n = n^{-\alpha} b_n$ et on exploite ce qui précède.

Exercice 10 : [énoncé]
Par sommation de séries entière, on sait déjà $R \geqslant \min(R_a, R_b)$
De plus, puisque $a_n b_n = 0$ on peut affirmer $|a_n| \leqslant |a_n + b_n|$ et donc $R \leqslant R_a$ et de même $R \leqslant R_b$ et donc $R \leqslant \min(R_a, R_b)$ puis $R = \min(R_a, R_b)$.

Exercice 11 : [énoncé]
Puisque la suite (a_n) est bornée mais ne tend par vers 0 (car $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre décimal) on peut affirmer $R = 1$ et la série entière diverge en 1 et -1.
L'intervalle cherché est donc $]-1, 1[$.

Exercice 12 : [énoncé]
Pour $x \neq 0$, posons $u_n = \pi^{\sqrt{n^2+2n}} x^{2n}$. Après calculs $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \pi x^2$ donc $R = 1/\sqrt{\pi}$.

Exercice 13 : [énoncé]
Série entière et série entière dérivée ont même rayon de convergence. Etudions alors le rayon de convergence de $\sum \cos((n+1)\alpha)x^n$. $(\cos((n+1)\alpha))$ est bornée donc $R \geqslant 1$ et ne tend pas vers 0 donc $R \leqslant 1$ et finalement $R = 1$.

Exercice 14 : [énoncé]
On a $a_{n+1} = \frac{n+1}{2n+3} a_n$. Par application de la règle de d'Alembert, on obtient $R = 2$.
La relation $(2n+3)a_{n+1} - (n+1)a_n$ avec $a_0 = 1$ permet d'affirmer que la somme S de la série entière $\sum a_n x^n$ est solution sur $]-2, 2[$ de l'équation différentielle $x(x-2)S'(x) + (x-1)S(x) + 1 = 0$.
La recherche de solution définie et continue en 0 donne $S(x) = \frac{\arcsin(x-1) + \frac{\pi}{2}}{\sqrt{x(2-x)}}$ pour $x > 0$ et $S(x) = \frac{\operatorname{arg\,ch}(1-x)}{\sqrt{x(x-2)}}$ pour $x < 0$.

Exercice 15 : [énoncé]
a) Pour $t > 1$, $\mathrm{e}^{-t^n} \to 0$ avec $0 \leqslant \mathrm{e}^{-t^n} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$. Par convergence dominée $I_n \to 0$.
b) Par le changement de variable $u = t^n$ qui est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme,

$$I_n = \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} u^{\frac{1-n}{n}} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$$

Par convergence dominée,

$$\int_1^{+\infty} u^{\frac{1-n}{n}} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$$

donc

$$I_n \sim \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$$

c) Par l'équivalent précédent $R = 1$ et la série entière diverge en 1. Par application du critère spécial des séries alternées, la série entière converge en -1.

Exercice 16 : [énoncé]
a) Par intégration par parties

$$I(p,q) = \frac{p}{q+1} I(p-1, q+1)$$

puis

$$I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

b)

$$u_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \text{ et } \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} \to \frac{1}{4} < 1$$

donc $\sum u_n$ converge.
c) Par le calcul ci-dessus $R = 4$ donc $]-4, 4[\subset \mathcal{D} \subset [-4, 4]$.
Par la formule de Stirling :

$$u_n \sim \frac{2\pi n^{2n+1}}{\mathrm{e}^{2n}} \frac{\mathrm{e}^{2n+1}}{\sqrt{2\pi(2n+1)}(2n+1)^{(2n+1)}} = \frac{\sqrt{2\pi}\mathrm{e}}{\sqrt{2n+1}} \frac{1}{2^{2n+1}} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1}$$

et

$$\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1} = \exp\left((2n+1)\ln\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)\right) \to \frac{1}{\mathrm{e}}$$

donc

$$u_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}\sqrt{n}}$$

$4^n u_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$ et par comparaison de séries à termes positifs, $\sum 4^n u_n$ diverge. $4 \notin \mathcal{D}$.
$v_n = (-4)^n u_n$, (v_n) est alternée, $|v_n| \to 0$ et $\left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = \frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{2n+2}{2n+3} < 1$ donc $(|v_n|)$ est décroissante.
Par application du critère spécial des séries alternées, $\sum v_n$ converge et donc $-4 \in \mathcal{D}$. Finalement $\mathcal{D} = [-4, 4[$. - 1 -

Exercice 17 : [énoncé]
a) $\frac{1}{2}\left(f(z) + f(-z)\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z^n + (-1)^n z^n) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} z^{2p}$.
b) $\frac{1}{3}\left(f(z) + f(jz) + f(j^2 z)\right) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\left(1 + j^n + j^{2n}\right) z^n = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{3p} z^{3p}$.

Exercice 18 : [énoncé]
a) Notons R le rayon de convergence de g.
Pour $x \in]0, R[$, $\sum_{n\geqslant 0} S_n x^n$ est absolument convergente donc la série de terme général

$$a_n x^n = S_n x^n - x S_{n-1} x^{n-1}$$

l'est aussi et donc $x \leqslant 1$. Par suite $R \leqslant 1$.
Pour $x \in]0, 1[$,

$$|S_n x^n| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k| \left|x^k\right|$$

or $\sum_{k\geqslant 0} a_k x^k$ est absolument convergente donc $(S_n x^n)$ est bornée.
Par suite $x \leqslant R$ et donc $1 \leqslant R$. Finalement $R = 1$.
b)

$$\forall x \in]-1, 1[\,, \sum_{n=0}^{N+1} a_n x^n = \sum_{n=0}^{N+1} S_n x^n - x\sum_{n=1}^{N+1} S_{n-1}x^{n-1} = S_{N+1}x^{N+1} + (1-x)\sum_{n=0}^{N} S_n x^n$$

A la limite quand $N \to +\infty$, on obtient $f(x) = (1-x)g(x)$ et donc

$$g(x) = \frac{f(x)}{1-x}$$

Exercice 19 : [énoncé]
Puisque $S_n \to +\infty$, on a $R_a \leqslant 1$.
Comme $a_n \leqslant S_n$, on a aussi $R_a \geqslant R_s$.
Enfin $S_n/S_{n+1} = 1 - a_{n+1}/S_{n+1} \to 1$ permet par la règle de d'Alembert d'obtenir $R_s = 1$.
On conclut $R_a = R_s = 1$.
Pour $|x| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k x^k x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Exercice 20 : [énoncé]
a) $a_n = O(1)$ donc $R \geqslant 1$. $a_n \not\to 0$ donc $R \leqslant 1$ et ainsi $R = 1$.
b) $\sum_{k=0}^{nT-1} a_k x^k = \sum_{k=0}^{T-1} a_k \frac{1-x^{nT}}{1-x^T}$ et donc $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{1-x^T}\sum_{k=0}^{T-1} a_k x^k$.

Exercice 21 : [énoncé]
On a $a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!} = 0$ compte tenu de l'hypothèse. On peut conclure que $S = 0$.

Exercice 22 : [énoncé]
a) On sait que $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^n$ ont le même rayon de convergence R. Puisque $a_n = o(a_n \ln n)$ et $a_n \ln n = o(n a_n)$ on peut affirmer que $\sum (a_n \ln n) x^n$ a aussi pour rayon de convergence R. De plus $a_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim a_n \ln n$ donc $\sum \left(a_n \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) x^n$ est encore de rayon de convergence R.
b) Notons que $\sum \ln n\, x^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$. On sait $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ donc $\ln n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ est borné par un certain M.
Par suite $\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \ln n\, x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}x^n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} M x^n = \frac{Mx}{1-x} = O\left(\frac{1}{1-x}\right)$ quand $x \to 1^-$.
Or par produit de Cauchy $\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln n\, x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$.

Exercice 23 : [énoncé]
a) Pour $0 < r < R$, il y a absolument convergence de $\sum a_n r^n$.

$\left|f(re^{i\theta})\right|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} r^n e^{-in\theta}$. Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, on a $\left|f(re^{i\theta})\right|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a_{n-k}} e^{i(2k-n)\theta} r^n$.

Puisque $\sum |a_n r^n|$ et $\sum |\overline{a_n} r^n|$ sont absolument convergentes, par produit de Cauchy, on peut affirmer que $\sum \sum_{k=0}^{n} |a_k|\left|\overline{a_{n-k}}\right| r^n$ converge. On en déduit que la série des fonctions continues $\theta \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a_{n-k}} e^{i(2k-n)\theta} r^n$ est normalement convergente et donc on peut permuter somme et intégration :

$\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 \,d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a_{n-k}} e^{i(2k-n)\theta} r^n \,d\theta$. Or $\int_0^{2\pi} e^{ip\theta} \,d\theta = 0$ pour tout $p \in \mathbb{Z}^\star$ donc, après simplification des termes nuls,

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 \,d\theta = \sum_{m=0}^{+\infty} |a_m|^2 r^{2m}$.

b) Quitte à passer à l'opposé, supposons que $|f|$ admet un maximum en 0.

Pour tout $0 < r < R$, $\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} - \sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 r^{2n} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^{2n} - |a_0|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 - |f(0)|^2 \,d\theta$.

Par intégration, d'une fonction négative, on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leqslant 0$. Or il s'agit d'une somme de termes positifs, ils sont donc tous nuls et on en déduit $\forall n \in \mathbb{N}^\star, a_n = 0$. La fonction f est donc constante.

c) Posons $f_N(z) = \sum_{n=0}^{N} |a_n| z^n$.

Pour tout $r > 0$,

$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} - \sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 - \left|f_N(re^{i\theta})\right|^2 \,d\theta$.

Or $|f(z)| \leqslant P(|z|)$ et $P(|z|) \leqslant |f_N(z)|$ donc comme à la question précédente on peut affirmer $\forall n > N, a_n = 0$ et donc $f \in \mathbb{C}_N[X]$.

Exercice 24 : [énoncé]

Notons $\sum a_n z^n$ la série entière dont la somme est égale à f sur B°.

La fonction f est continue sur un compact donc uniformément continue.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ vérifiant

$\forall z, z' \in B, |z - z'| \leqslant \delta \Rightarrow |f(z) - f(z')| \leqslant \varepsilon$.

Considérons alors $r = 1 - \delta$ et $g_r : z \mapsto f(rz)$.

Pour tout $z \in B$, $|z - rz| = \delta |z| \leqslant \delta$ donc $|f(z) - g(z)| \leqslant \varepsilon$. Ainsi $\|f - g\|_{\infty,B} \leqslant \varepsilon$

Puisque la série entière $\sum a_n z^n$ converge uniformément vers f sur tout compact inclus dans B°, la série entière $\sum a_n r^n z^n$ converge uniformément vers g sur B. Il existe donc un polynôme P vérifiant $\|P - g\|_{\infty,B} \leqslant \varepsilon$ puis $\|f - P\|_{\infty,B} \leqslant 2\varepsilon$ ce qui permet de conclure.

Exercice 25 : [énoncé]

a) $u_n = O(1)$ donc $u_n/n! = O(1/n!)$.

Or la série entière exponentielle $\sum \frac{x^n}{n!}$ est de rayon de convergence $R = +\infty$.

On en déduit que la série entière $\sum \frac{u_n}{n!} x^n$ est aussi de rayon de convergence $+\infty$.

Puisque $u_n = O(1)$, $S_n = O(n)$ et donc $S_n/n! = O(1/(n-1)!)$.

Comme ci-dessus, on peut conclure que $\sum \frac{S_n}{n!} x^n$est de rayon de convergence $+\infty$.

b) Pour $x \in \mathbb{R}$, $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_{n+1}}{n!} x^n$ donc

$$S'(x) - S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_{n+1} - S_n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_{n+1}}{n!} x^n = u'(x)$$

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{-x} S(x) - \ell = e^{-x} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n - \ell}{n!} x^n\right)$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|S_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

On a alors, pour $x \geqslant 0$

$$\left|e^{-x} S(x) - \ell\right| \leqslant e^{-x} \left[\left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{|S_n - \ell|}{n!} x^n\right) + \left(\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{n!} x^n\right)\right]$$

Or

$$\left(\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{n!} x^n\right) \leqslant \varepsilon e^x$$

et

$$\left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{|S_n - \ell|}{n!} x^n\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^x\right)$$

donc pour x assez grand

$$\left|e^{-x} S(x) - \ell\right| \leqslant e^{-x} \left[\varepsilon e^x + \varepsilon e^x\right] = 2\varepsilon$$

Ainsi $e^{-x} S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$.

d) Si $u_n = (-1)^n$ alors

$$S_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par suite

$$S(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p)!}x^{2p}=\mathrm{ch}x$$

et donc

$$\mathrm{e}^{-x}S(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\frac{1}{2}$$

Exercice 26 : [énoncé]

a) Posons

$$a_n=\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Puisque $a_{n+1}/a_n\to 1$, on peut affirmer $R=1$.

b) La suite (a_n) décroît vers 0 donc par le critère spécial des séries alternée, la série entière converge en $x=-1$.

Puisque $a_n\sim 1/\sqrt{n}$, par équivalence de séries à termes positifs, la série entière diverge en $x=1$.

c) Par positivité des termes sommés, on a pour $x\in[0,1]$,

$$f(x)\geqslant\sum_{n=1}^{N}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$$

Or

$$\sum_{n=1}^{N}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n\xrightarrow[x\to1^-]{}\sum_{n=1}^{N}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Puisque

$\sum\limits_{n=1}^{N}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\xrightarrow[N\to+\infty]{}+\infty$

Pour tout $M\in\mathbb{R}$, il existe un rang N tel que

$$\sum_{n=1}^{N}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\geqslant M+1$$

et pour x au voisinage de 1^-

$$\sum_{n=1}^{N}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n\geqslant M$$

puis

$$f(x)\geqslant M$$

On peut donc affirmer que

$$f(x)\xrightarrow[x\to1^-]{}+\infty$$

d) On a

$$(1-x)f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n-\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^{n+1}$$

et par décalage d'indice

$$(1-x)f(x)=\sin(1)x+\sum_{n=2}^{+\infty}\left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right]x^n$$

Puisque

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)=O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

la série entière en second membre est définie et continue en 1. On en déduit

$$(1-x)f(x)\xrightarrow[x\to1]{}\sin(1)+\sum_{n=2}^{+\infty}\left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right]=0$$

Il est aussi possible de procéder par les en ε exploitant

$$\left|\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right|\leqslant\varepsilon\text{pour } n \text{ assez grand}$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$$

Exercice 27 : [énoncé]

a) Soit $M\in\mathbb{R}$ tel que $S(x)\leqslant M$ pour tout $x\in[0,1[$.

Soit $N\in\mathbb{N}$. Par sommation de termes positifs,

$$\sum_{n=0}^{N}a_nx^n\leqslant S(x)\leqslant M$$

En passant à la limite quand $x\to1^-$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{N}a_n\leqslant M$$

La séries à termes positifs $\sum a_n$ ayant ses sommes partielles bornées, elle converge.
b) La fonction S est croissante sur $[0,1[$ et est bornée. On peut donc affirmer qu'elle converge en 1^- et introduire

$$\lim_{x\to 1^-} S(x)$$

De plus, cette valeur majore S sur $[0,1[$, de sorte qu'en reprenant l'étude ci-dessus avec cette valeur pour M, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leqslant \lim_{x\to 1^-} S(x)$$

Inversement, pour tout $x \in [0,1[$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

et donc à la limite quand $x \to 1^-$

$$\lim_{x\to 1^-} S(x) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

puis finalement l'égalité demandée.

Exercice 28 : [énoncé]
La fonction f est évidemment définie en 1. Pour étudier sa continuité, introduisons

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$$

On peut écrire pour $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k(x^k - 1) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k - R_n$$

avec

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (R_{k-1} - R_k) x^k$$

Puisque $|x| < 1$ et $R_n \to 0$, on peut écrire

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{k-1} x^k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k$$

avec convergence des deux sommes introduites.
Par décalage d'indice, on obtient

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k (x-1) + R_n x^{n+1}$$

et ainsi

$$f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k(x^k - 1) + (x-1)\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k - R_n(x^{n+1} - 1)$$

Soit $\varepsilon > 0$.
Puisque $R_n \to 0$, pour n assez grand on a

$$\forall k \geqslant n, |R_k| \leqslant \varepsilon$$

donc

$$\left|(x-1)\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k\right| \leqslant (1-x)\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varepsilon x^k = \varepsilon$$

Pour un tel n fixé, on a quand $x \to 1^-$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x^k - 1) \to 0 \text{ et } R_n(x^{n+1} - 1) \to 0$$

donc pour x suffisamment proche de 1,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k(x^k - 1)\right| \leqslant \varepsilon \text{ et } \left|R_n(x^{n+1} - 1)\right| \leqslant \varepsilon$$

donc

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right| \leqslant 3\varepsilon$$

Exercice 29 : [énoncé]
a) Pour $a_n = (-1)^n$, on a $f(x) = 1/(1+x)$, $\ell = 1/2$ et la série $\sum a_n$ diverge.
b) Pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$, on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{N} a_n - \ell = A_N + B_N - C_N$$

avec

$$A_N = f(x) - \ell, B_N = \sum_{n=0}^{N} a_n - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \text{ et } C_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 au-delà duquel

$$|a_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{n}$$

et alors pour tout $N \geqslant n_0$

$$|C_N| \leqslant \frac{\varepsilon}{N} \sum_{n=N+1}^{+\infty} x^n \leqslant \frac{\varepsilon}{N(1-x)}$$

Posons alors

$$x = 1 - \frac{1}{N}$$

et on a

$$|C_N| \leqslant \varepsilon$$

D'autre part

$$|B_N| = \left|\sum_{n=0}^{N} a_n(1-x^n)\right| \leqslant (1-x)\sum_{n=0}^{N} n a_n = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} n a_n$$

En vertu du théorème de Cesaro

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} n a_n \to 0$$

et donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $N \geqslant n_1$

$$|B_N| \leqslant \varepsilon$$

Enfin, puis f tend vers ℓ en 1^-, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour $N \geqslant n_2$

$$A_N = |f(1-1/N) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Finalement, pour $N \geqslant \max(n_0, n_1, n_2)$

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n - \ell\right| \leqslant 3\varepsilon$$

On peut donc affirmer que la série $\sum a_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell$$

Exercice 30 : [énoncé]
a) $\alpha_n = \ln n \neq 0$ pour $n \geqslant 2$.
$\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| \to 1$ donc le rayon de convergence de la série entière $\sum \ln(n) x^n$ vaut 1.
De plus, la série entière est grossièrement divergente en 1 et -1.
On en déduit $I =]-1,1[$.
b) $a_n \sim \frac{1}{2n^2}$ donc $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 1$ le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut 1.
De plus, la série entière est absolument convergente en 1 et-1.
La fonction g est donc définie sur l'intervalle $[-1,1]$.
c) Pour $n \geqslant 2$, $a_n = \ln n - \ln(n-1) - 1/n$ donc

$$a_n x^n = \ln(n) x^n - \ln(n-1) x^n - \frac{1}{n} x^n$$

En sommant pour n allant de 2 à $+\infty$,

$$g(x) = (1-x) f(x) + \ln(1-x)$$

d) Puisque $a_n \sim \frac{1}{2n^2}$, la série $\sum |a_n|$ est convergente et donc la fonction g est définie et continue sur le segment $[-1,1]$. Par suite, la fonction g converge en 1^- et puisque le terme $\ln(1-x)$ diverge quand $x \to 1^-$, on obtient

$$f(x) \underset{x \to 1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

e) Puisque

$$f(x) = \frac{g(x) - \ln(1-x)}{1-x}$$

on obtient quand $x \to -1^+$,

$$f(x) \to \frac{g(-1) - \ln(2)}{2}$$

Il reste à calculer $g(-1)$...

$$g(-1) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n (\ln n - \ln(n-1)) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Or

$$1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

et en regroupant les termes pairs et impairs consécutifs
$\sum_{n=2}^{2N+1} (-1)^n (\ln n - \ln(n-1)) = \sum_{p=1}^{N} 2\ln\left(\frac{2p}{2p-1}\right) - \ln(2N+1) = \ln \frac{2^{4N}(N!)^4}{(2N+1)!(2N)!} \to \ln \frac{\pi}{2}$
en vertu de la formule de Stirling.
Finalement

$$g(-1) = \ln\frac{\pi}{2} + \ln(2)$$

On en déduit

$$f(x) \xrightarrow[x\to -1^+]{} \frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2}$$

Exercice 31 : [énoncé]
Notons que l'intégrale définissant a_n converge car $|\mathrm{th}t| \leqslant 1$.
a) Pour $t \geqslant n$,

$$\frac{\mathrm{th}n}{t^2} \leqslant \frac{\mathrm{th}t}{t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$$

En intégrant et en exploitant $\mathrm{th}n \to 1$, on obtient $a_n \sim \frac{1}{n}$.
On en déduit que $R = 1$. Pour $x = -1$, $\sum a_n x^n$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées car (a_n) décroît vers 0.
Pour $x = 1$, $\sum a_n x^n$ diverge par l'équivalent précédent. La fonction somme est définie sur $[-1, 1[$.
b) Pour $x \in [-1, 0]$, on peut appliquer le critère spécial des séries alternées à la série $\sum a_n x^n$ et affirmer

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k\right| \leqslant a_{n+1} |x|^{n+1} \leqslant a_{n+1}$$

ce qui assure la convergence uniforme de la série. Par suite la fonction somme est continue en -1.
c) On a

$$\left|a_n - \frac{1}{n}\right| \leqslant \frac{1-\mathrm{th}n}{n}$$

donc pour $x \in [0, 1[$,

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-\mathrm{th}n}{n} x^n$$

Or

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n = -\ln(1-x) \to +\infty \text{ et } n^2 \frac{1-\mathrm{th}n}{n} \sim 2ne^{-2n} \to 0$$

donc $\sum \frac{1-\mathrm{th}n}{n}$ est absolument convergente et la somme de la série entière $\sum \frac{1-\mathrm{th}n}{n} x^n$ est définie et continue en 1. On en déduit

$$f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} -\ln(1-x)$$

Exercice 32 : [énoncé]
$R = 1$, il y a divergence en $x = 1$ et convergence par le CSSA en $x = -1$.
La fonction somme est définie sur $[-1, 1[$.
Par application du critère spécial des séries alternées sur $[-1, 0]$,

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) x^k\right\|_{\infty,[-1,0]} \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \to 0$$

il y a donc convergence uniforme sur $[-1, 0]$ et donc continuité de la somme en -1 puis finalement sur $[-1, 1[$.
Pour étudier la fonction en 1^-, on peut exploiter l'encadrement

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n = \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{n}$$

On en déduit pour $x \in [0, 1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) x^n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

Or

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

$$\text{et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x}\left(-\ln(1-x) - x\right) \underset{x\to 1^-}{\sim} -\ln(1-x)$$

Finalement

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} -\ln(1-x)$$

Exercice 33 : [énoncé]

a) On peut écrire $a_n = b_n\varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \to 0$ et alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\varepsilon_n x^n$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, on ait $|\varepsilon_n| \leqslant \varepsilon$. On peut alors écrire

$$\left|f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} b_n\varepsilon_n x^n\right| \leqslant \varepsilon \sum_{n=N}^{+\infty} b_n x^n \leqslant \varepsilon g(x)$$

puis

$$|f(x)| \leqslant \varepsilon g(x) + \left|\sum_{n=0}^{N-1} b_n\varepsilon_n x^n\right|$$

Quand $x \to R^-$,

$$g(x) \to +\infty \text{ et } \sum_{n=0}^{N-1} b_n\varepsilon_n x^n \to \sum_{n=0}^{N-1} b_n\varepsilon_n R^n = C^{te}$$

donc pour x assez proche de R

$$\left|\sum_{n=0}^{N-1} b_n\varepsilon_n R^n\right| \leqslant \varepsilon g(x)$$

puis

$$|f(x)| \leqslant 2\varepsilon g(x)$$

Cela permet de conclure que $f(x) = o(g(x))$ quand $x \to R$.

b) Si $a_n \sim b_n$ alors $a_n = b_n + o(b_n)$ donc $f(x) = g(x) + o(g(x)) \sim g(x)$ en vertu de a).

Exercice 34 : [énoncé]

a) Notons a_n le coefficient générale de la série entière étudiée $a_m = 1$ s'il existe n tel que $m = p_n$ et $a_m = 0$ sinon. On observe$a_n = O(1)$ donc $R \geqslant 1$ et $a_n \not\to 0$ donc $R \leqslant 1$ puis $R = 1$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant N$, $n \leqslant \varepsilon p_n$. On a alors :

$$0 \leqslant (1-x)f(x) \leqslant (1-x)\sum_{n=0}^{N-1} x^{p_n} + (1-x)\sum_{n=N}^{+\infty} x^{n/\varepsilon}$$

Quand $x \to 1^-$,

$$(1-x)\sum_{n=0}^{N-1} x^{p_n} \to 0$$

et

$$(1-x)\sum_{n=N}^{+\infty} x^{n/\varepsilon} \leqslant \frac{1-x}{1-x^{1/\varepsilon}} \to \varepsilon$$

donc pour x suffisamment proche de 1,

$$0 \leqslant (1-x)f(x) \leqslant 2\varepsilon$$

Cela permet d'affirmer $(1-x)f(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0$.

b) Ici, il faut penser à une comparaison série-intégrale...

Pour $x \in]0,1[$, la fonction $t \mapsto x^{t^q}$ est décroissante. Par la démarche classique, on obtient

$$\int_0^{+\infty} x^{t^q}\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} x^{t^q}\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\int_0^{+\infty} x^{t^q}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{t^q \ln x}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-a^q t^q}\,\mathrm{d}t$$

avec $a = \sqrt[q]{-\ln x}$ donc

$$\int_0^{+\infty} x^{t^q}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^q}\,\mathrm{d}u$$

et on ne calculera pas cette dernière intégrale.

Par l'encadrement qui précède, on peut affirmer

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt[q]{-\ln x}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^q}\,\mathrm{d}u$$

Exercice 35 : [énoncé]

a) $R = 1$.

b) $f_0(x) = \frac{x}{1-x}$, $f_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.

On obtient les expressions de $f_2, \dots, f_5$ par

```
seq(normal(sum(n^k*x^n,n=1..infinity)),k=2..5);
```

On peut présumer un équivalent de la forme $\frac{C_\alpha}{(1-x)^{1+\alpha}}$.
On peut obtenir les premières valeurs de C_α par

```
seq(eval(simplify(sum(n^k*x^n,n=1..infinity)*(1-x)^(k+1)),x=1),k=0..5);
```

Cela laisse présumer $C_\alpha = (-1)^{\alpha+1}\alpha!$.
Pour $x \in \left]-1,1\right[$, $f_p'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{p+1}x^{n-1}$ donc $xf_p'(x) = f_{p+1}(x)$.
En raisonnant par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$, on définit la suite (Q_p) de polynômes de sorte que
$Q_0 = X$ et $Q_{p+1}(X) = X(1-X)Q_p'(X) + (p+1)XQ_p(X)$.
On observe $Q_{p+1}(1) = (p+1)Q_p(1)$ de sorte que $Q_p(1) = p!$.
On peut alors affirmer $f_p(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{p!}{(1-x)^{1+p}}$.
c) A partir du développement connu de$(1+u)^\alpha$, on obtient $b_n = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}{n!}$.
$\ln\frac{(n+1)^\alpha}{b_{n+1}} - \ln\frac{n^\alpha}{b_n} = \alpha\ln\frac{n+1}{n} - \ln\frac{b_{n+1}}{b_n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum \ln\frac{(n+1)^\alpha}{b_{n+1}} - \ln\frac{n^\alpha}{b_n}$ est absolument convergente.
On en déduit que la suite de terme général $\ln\frac{n^\alpha}{b_n}$ converge puis que $\frac{n^\alpha}{b_n}$ tend vers une constante $A(\alpha) > 0$.
On peut alors conclure en exploitant le résultat suivant :
$a_n \sim b_n$ avec $a_n > 0$, $R = 1$ et $\sum a_n$ diverge entraine $\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} b_nx^n$.
Pour établir ce résultat :
– d'une part, on montre que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$,
– d'autre part, on écrit $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n - \sum_{n=0}^{+\infty} b_nx^n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |a_n - b_n| + \varepsilon\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$ en choisissant N de sorte que $|a_n - b_n| \leqslant \varepsilon a_n$ pour $n \geqslant N$.
On peut alors conclure que $f_\alpha(x) \sim \frac{A(\alpha)}{(1-x)^{1+\alpha}}$.

Exercice 36 : [énoncé]
$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty \leqslant K\,|xA|^{n+1}$. Pour $|x| \leqslant a$ et $|x| < 1/A$, $\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\infty]{} 0$ et donc f est égale à la somme de sa série de Taylor au voisinage de 0.

Exercice 37 : [énoncé]
Pour $x \in [0, R[$, la série $\sum \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$ est une série à termes positifs. Par la formule de Taylor avec reste intégral

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

et puisque le reste intégral est positif, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \leqslant f(x)$$

Puisque ses sommes partielles sont majorées, la série à termes positifs $\sum \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$ est convergente.
Pour $x \in \left]-R, 0\right]$, on a

$$\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right| = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,|x|^n$$

et la série $\sum \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$ est absolument convergente donc convergente.

Exercice 38 : [énoncé]
Pour tout a et $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour $x \geqslant a$, la série numérique de terme général $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ est une série majorée par $f(x)$ et à termes positifs, elle est donc convergente ce qui assure

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

Pour $x \leqslant 0$,

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(0)\,\mathrm{d}t = \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0) \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

en exploitant la remarque initiale avec 0 et $-x$ pour a et x.
Pour $x \geqslant 0$,

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x) \to 0$$

en exploitant la remarque initiale avec x et $2x$ pour a et x.
Finalement f est égale à la somme de sa série de Taylor en 0 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 39 : [énoncé]
Pour tout $x \in \left]-a,a\right[$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Pour $x \geqslant 0$, la série de terme général $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ est une série majorée par $f(x)$ et à termes positifs, elle est donc convergente ce qui assure

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

Pour $x \in \left]-a,0\right]$,

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(0)\mathrm{d}t = \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

donc f est égale à la somme de sa série de Taylor en 0 sur $\left]-a,0\right]$
Pour tout $x \in \left]0,a\right[$, $\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$ converge quand $n \to +\infty$. Or

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = \frac{x^n}{n!} \int_0^1 (1-\theta)^n f^{(n+1)}(\theta x)\mathrm{d}\theta$$

donc si $x < y \in \left]0,a\right[$, on a pour tout $\theta \in [0,1]$, l'inégalité

$$f^{(n+1)}(\theta x) \leqslant f^{(n+1)}(\theta y)$$

de par la croissance de $f^{(n+1)}$. On en déduit

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{x^n}{y^n} \int_0^y \frac{(y-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

or $\int_0^y \frac{(y-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$ converge quand $n \to +\infty$ et $\frac{x^n}{y^n} \to 0$ donc

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

et finalement f est aussi égale à la somme de sa série de Taylor en 0 sur $\left]0,a\right[$.

Exercice 40 : [énoncé]
a) Par la formule de Taylor avec reste intégral

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \underset{t=xu}{=} \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u$$

Puisque $x \leqslant |x| \leqslant r$, on a $xu \leqslant ru$ puis $f^{(n+1)}(xu) \leqslant f^{(n+1)}(ru)$ car $f^{(n+1)}$ est croissante puisque de dérivée $f^{(n+2)} \geqslant 0$.
On en déduit

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{r^{n+1}} \left|f(r) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} r^k\right|$$

Or la somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} r^k$ est positive et majorée par $f(r)$ donc

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k\right| \leqslant \left|\frac{x}{r}\right|^{n+1} f(r)$$

b) Puisque $|x/r| < 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$

Ainsi f est développable en série entière sur $\left]-a,a\right[$ car égale à la somme de sa série de Taylor sur $\left]-a,a\right[$.
c) Posons $f(x) = \tan x$. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on montrer que $f^{(n)}(x) = P_n(\tan x)$ avec P_n un polynôme dont la parité est celle de $n+1$.
On en déduit alors que $f^{(n)}(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \left[0,\pi/2\right[$.
En reprenant l'étude qui précède, on obtient $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ pour tout $x \in \left[0,\pi/2\right[$.
Par imparité de f, $f^{(2p)}(0) = 0$ et par un argument de parité

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{f^{(2p+1)}(0)}{(2p+1)!} x^{2p+1}$$

pour tout $x \in \left]-\pi/2,\pi/2\right[$.

Exercice 41 : [énoncé]
Posons

$$f(x) = \frac{1}{1-\mathrm{sh}x}$$

La fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\infty,R\right[$ avec $R = \mathrm{argsh}1$.
Soit $x \in \left]-R,R\right[$. Puisque $|\mathrm{sh}x| < 1$, on peut écrire

$$f(x) = \frac{1}{1-\mathrm{sh}x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{sh}^n x$$

Chacune des fonctions $x \mapsto \text{sh}^n x$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ ce qui permet d'écrire

$$\text{sh}^n x = \sum_{k=n}^{+\infty} a_{n,k} x^k$$

Puisque les coefficients du développement en série entière de la fonction sh sont tous positifs, on a aussi $a_{n,k} \geqslant 0$ pour tout n, k. Pour $x \in]-R, R[$, on peut donc écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} a_{n,k} x^n \right)$$

Puisque la série $\sum_{k \geqslant n} |a_{n,k} x^n| = \sum_{k \geqslant n} a_{n,k} |x|^n$ converge et puisque la série

$\sum_{n \geqslant 0} \sum_{k=n}^{+\infty} |a_{n,k} x^n| = \sum_{n \geqslant 0} (\text{sh}\,|x|)^n$ converge aussi, on peut par le théorème de Fubini échanger les deux sommes ce qui donne

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} a_{n,k} \right) x^n$$

Ainsi la fonction f est développable en série entière sur $]-R, R[$. Le rayon de convergence de la série entière ainsi introduite est alors au moins égale à R et en fait exactement égal à R car f diverge vers $+\infty$ en R^- et ne peut donc être prolongée par continuité en R.

Exercice 42 : [énoncé]
En dérivant et en décomposant en éléments simples

$$(\ln(x^2 - 5x + 6))' = \frac{2x - 5}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1 - x/2} - \frac{1}{3}\frac{1}{1 - x/3}$$

donc

$$\ln(x^2 - 5x + 6) = \ln 6 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) x^n$$

avec un rayon de convergence $R = 2$.
On peut aussi trouver ce développement en série entière en factorisant

$$\ln(x^2 - 5x + 6) = \ln(2 - x) + \ln(3 - x)$$

Exercice 43 : [énoncé]
On peut écrire

$$\ln(1 - x^3) = \ln(1 - x) + \ln(1 + x + x^2)$$

donc sur $]-1, 1[$,

$$\ln(1 + x + x^2) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^{3n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

avec

$$a_n = \frac{1}{n} \text{ si } n \neq 0 \quad [3] \text{ et } a_{3n} = -\frac{1}{n} + \frac{1}{3n} = -\frac{2}{3n}$$

Exercice 44 : [énoncé]
$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)} = \frac{a/(a-b)}{1-ax} + \frac{b/(b-a)}{1-bx} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} x^n$ avec $R = \min\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$.
$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2 x^n = \frac{1}{(b-a)^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (b^{2n+2} - 2a^{n+1} b^{n+1} + a^{2n+2}) x^n$ donc
$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2 x^n = \frac{1}{(b-a)^2} \left(\frac{b^2}{1-b^2 x} - \frac{2ab}{1-abx} + \frac{a^2}{1-a^2 x} \right) = \frac{1+abx}{(1-a^2x)(1-abx)(1-b^2x)}$

Exercice 45 : [énoncé]
Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1 - x^2}{1 - 2x\cos t + x^2} = -1 + \frac{1}{1 - x\mathrm{e}^{it}} + \frac{1}{1 - x\mathrm{e}^{-it}}$$

donc

$$\frac{1 - x^2}{1 - 2x\cos t + x^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(nt) x^n$$

pour tout $x \in]-1, 1[$.

Exercice 46 : [énoncé]
$\frac{1 - z\cos t}{1 - 2z\cos t + z^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - (\mathrm{e}^{it} z)} + \frac{1}{1 - (\mathrm{e}^{-it} z)} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{e}^{int} + \mathrm{e}^{-int}) z^n$ puis
$\frac{1 - z\cos t}{1 - 2z\cos t + z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(nt) z^n$

Exercice 47 : [énoncé]
En dérivant

$$f'(x) = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{(1-x)^2 + (1+x)^2\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

Par les formules de trigonométrie relatives à la tangente de l'angle moitié

$$f'(x) = \frac{\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$$

Par décomposition en éléments simple

$$f'(x) == \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x - \mathrm{e}^{i\alpha}} - \frac{1}{x - \mathrm{e}^{-i\alpha}}\right)$$

Pour $x \in\,]-1, 1[$, on obtient

$$f'(x) = \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{i(n+1)\alpha}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-i(n+1)\alpha}x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sin(n+1)\alpha$$

Enfin, en intégrant ce développement en série entière sur $]-1, 1[$,

$$f(x) = \frac{\alpha}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\alpha)}{n}x^n$$

Exercice 48 : [énoncé]
$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2} \underset{u=1/t}{=} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+(ux)^2} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u^{2n}x^{2n}\mathrm{d}u$. Pour $|x| < 1$, il y a convergence normale pour $u \in [0, 1]$ donc $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n} = \frac{\arctan x}{x}$.

Exercice 49 : [énoncé]
a) On a

$$\sin(tx) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}t^{2k+1}x^{2k+1}$$

A l'aide d'intégration par parties

$$\int_0^{+\infty} t^{2k+1}\mathrm{e}^{-t^2} = \frac{k!}{2}$$

Or

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}t^{2k+1}x^{2k+1}\right|\mathrm{d}t \leqslant \frac{k!}{2(2k+1)!}|x|^{2k+1}$$

qui est terme général d'une série convergente.
On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme de Fubini et affirmer

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\sin(tx)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k k!}{2(2k+1)!}x^{2k+1}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.
b) La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}\sin(tx)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{-t^2}\sin(tx)\right)\right| \leqslant t\mathrm{e}^{-t^2}$$

avec $t \mapsto t\mathrm{e}^{-t^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
La fonction

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\sin(tx)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\cos(tx)\,\mathrm{d}t$$

A l'aide d'une intégration par parties

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}xf(x)$$

et ainsi f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$2y' + xy = 1$$

De plus f vérifie la condition initiale $f(0) = 0$.
Si une somme de série entière est solution de l'équation différentielle $2y' + xy = 1$ et vérifiant $y(0) = 0$, c'est, après calculs, la fonction

$$g : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k k!}{2(2k+1)!}x^{2k+1}$$

de rayon de convergence $R = +\infty$.
Puisque f et g sont solutions sur $\mathbb{R}$ à l'équation différentielle linéaire $2y' + xy = 1$ vérifiant la condition initiale $y(0) = 0$ et puisque le théorème de Cauchy assure l'unicité d'une solution à un tel problème, on peut identifier f et g.

Finalement

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k k!}{2(2k+1)!} x^{2k+1}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 50 : [énoncé]
Pour $|x| < 1$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\left(\frac{x\sin\alpha}{1 - x\cos\alpha}\right)\right) = \frac{\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$$

Après décomposition en éléments simples

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\left(\frac{x\sin\alpha}{1 - x\cos\alpha}\right)\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{\mathrm{e}^{i\alpha}}{1 - x\mathrm{e}^{i\alpha}} - \frac{\mathrm{e}^{-i\alpha}}{1 - x\mathrm{e}^{-i\alpha}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n\alpha) x^{n-1}$$

Par intégration de série entière, on obtient la relation proposée.

Exercice 51 : [énoncé]
Posons

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t + t^2}$$

f est dérivable et

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x + x^2}$$

Pour $|x| < 1$,

$$f'(x) = \frac{1 - x}{1 - x^3} = (1 - x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

avec $a_{3n} = 1$, $a_{3n+1} = -1$ et $a_{3n+2} = 0$.
En intégrant,

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

avec

$$f(0) = \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t + t^2}$$

Après calculs

$$f(0) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

Exercice 52 : [énoncé]
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} f(x)$, $f''(x) = \frac{-x}{2(1+x^2)^{3/2}} f(x) + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} f'(x)$ donne
$(1 + x^2) f''(x) + x f'(x) - \frac{1}{4} f(x) = 0$.
La démarche classique donne $a_{n+2} = -\frac{1}{4}\frac{(2n+1)(2n-1)}{(n+2)(n+1)} a_n$ avec $a_0 = 1$ et $a_1 = \frac{1}{2}$.
On obtient alors $a_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^{4p-1}} \frac{(4p-2)!}{((2p)!)((2p-1)!)}$ et $a_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{2^{4p}} \frac{(4p-1)!}{(2p+1)!(2p-1)!}$.

Exercice 53 : [énoncé]
a) Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{it}$ qui est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.
b) La convergence de l'intégrale définissant F provient de la convergence supposée de $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$.
On a $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(itx)^k}{k!} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{itx} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(itx)^k}{k!}\right) f(t)\,\mathrm{d}t$
avec $\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(itx)^k}{k!} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(it)^k f(t)}{k!}\,\mathrm{d}t\right) x^k$
et $\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{itx} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(itx)^k}{k!}\right) f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^{n+1} |f(t)|\,\mathrm{d}t \to 0$ compte tenu des hypothèses.
On peut alors affirmer $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(it)^k}{k!} f(t)\,\mathrm{d}t\right) x^k$ avec convergence sur $\mathbb{R}$ de la série entière considérée.

Exercice 54 : [énoncé]
a) Pour $t \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}^\star$, $\left|\frac{a_n}{n-t}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(a_n^2 + \frac{1}{(n-t)^2}\right)$ donc $\sum \frac{a_n}{n-t}$ est absolument convergente. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}^\star$.
b) Pour $|t| < 1$, $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} \frac{1}{1-t/n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{a_n t^m}{n^{m+1}}$.
Puisque $\sum_{m\geqslant 0} \frac{|a_n t^m|}{n^{m+1}}$ converge pour tout $n \geqslant 1$ et puisque $\sum_{n\geqslant 1}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{|a_n t^m|}{n^{m+1}} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{|a_n|}{n-|t|}$ converge, on a par le théorème de Fubini, $f(t) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{m+1}}\right) t^m$. La fonction f est donc développable en série entière sur $]-1, 1[$.
c) Si $f(t) = 0$ sur $[-1/2, 1/2]$ alors le développement en série entière de f sur $]-1, 1[$ est nul et on en déduit que f est nulle sur $]-1, 1[$.
Or $f(t) = \frac{a_1}{1-t} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{n-t}$ avec $t \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{n-t}$ définie et continue au voisinage de 1.
On en déduit que $a_1 = 0$.

On peut alors reprendre l'étude du b) et, sachant $a_1 = 0$, on peut affirmer que f est développable en série entière sur $]-2,2[$. Or ce dernier développement étant nul, on obtient comme ci-dessus $a_2 = 0$ etc. Au final, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est nulle.

Exercice 55 : [énoncé]
a) Pour $x \neq 0$, $\left|\frac{(-1)^{n+2}(n+1)}{(-1)^{n+1}n}\frac{x^{2n+3}}{x^{2n+1}}\right| \to \left|x^2\right|$ donc $R = 1$.
$f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$ donc $xf'(x) = -\frac{x}{(1+x)^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n nx^n$ puis
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n+1} = x\times\left(\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\right) = \frac{x^3}{(1+x^2)^2}$.
b) Pour $x \neq 0$, $\left|\frac{n}{(n+1)!}\frac{x^{n+1}}{x^n}/\frac{n-1}{n!}\right| \to 0$ donc $R = +\infty$.
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{n-1}{n!}x^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-1)!} - \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = (x-1)\mathrm{e}^x$

Exercice 56 : [énoncé]
a) Notons $\mathcal{D}$ l'intervalle de convergence de cette série entière.
Le rayon de convergence étant 1 on en déduit : $]-1,1[\subset \mathcal{D} \subset [-1,1]$.
De plus $\left|\frac{(-1)^n}{n(n-1)}\right| \sim \frac{1}{n^2}$ donc $f(1)$ et $f(-1)$ existe. Ainsi $\mathcal{D} = [-1,1]$.
b) Sur $]-1,1[$, f est $\mathcal{C}^\infty$ et $f'(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n-1}x^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n = \ln(1+x)$.
Donc $\int\ln(1+x)\,\mathrm{d}x = (1+x)\ln(1+x) - x + C$.
Puisque $f(0) = 0$, on conclut $f(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$ sur $]-1,1[$.
c) $\forall x \in [-1,1]\,, \left|\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n\right| \leqslant \frac{1}{n(n-1)} \sim \frac{1}{n^2}$ donc la série de fonctions définissant f converge normalement sur $[-1,1]$ et par suite f est continue.
$f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}((1+x)\ln(1+x) - x) = 2\ln 2 - 1$.
$f(-1) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+}((1+x)\ln(1+x) - x) = 1$.

Exercice 57 : [énoncé]
Clairement $R = +\infty$. $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{(n+1)(n-2)}{n!}x^n = \sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{n^2-n-2}{n!}x^n = \sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{n(n-1)-2}{n!}x^n$ donc
$\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{(n+1)(n-2)}{n!}x^n = \sum\limits_{n\geqslant 2}\frac{x^n}{(n-2)!} - 2\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n!} = (x^2-2)\mathrm{e}^x$.

Exercice 58 : [énoncé]
Clairement $R = 1$. Posons $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$. $(xS(x))' = \frac{1}{1-x^2}$ donc
$S(x) = \frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}$ en prenant soin d'étudier les valeurs en 0 du premier membre et du prolongement par continuité du second.

Exercice 59 : [énoncé]
Par la règle de d'Alembert, on obtient $R = 1$.
Posons
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2n+1}$$
On a
$$xS(x^2) = \arctan x$$
On en déduit
$$S(x) = \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \text{ pour } x > 0$$
On a aussi
$$xS(-x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$
donc
$$S(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x}}\ln\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}} \text{ si } x < 0$$
Enfin, pour $x = 0$, $S(0) = 1$.

Exercice 60 : [énoncé]
Clairement $R = 1$.
Posons
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{4n^2-1}$$
Par décomposition en éléments simples
$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$
On en déduit
$$S(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{x^2-1}{4x}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

Exercice 61 : [énoncé]
a) Par convergence dominée par la fonction $\varphi : t \mapsto 1$, on obtient $a_n \to 0$.
b) On a

$$a_n + a_{n+2} = \int_0^{\pi/4} (\tan t)'(\tan t)^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$

c) Par monotonie $a_n + a_{n+2} \leqslant 2a_n \leqslant a_n + a_{n-2}$. On en déduit $a_n \sim \frac{1}{2n}$ puis $u_n(x) \sim \frac{x^n}{2n^{\alpha+1}}$.
Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est donc égale à 1.
Pour $x = 1$, $\sum u_n(x)$ converge si, et seulement si,$\alpha > 0$.
Pour $x = -1$, $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement si $\alpha \leqslant -1$.
Pour $\alpha > -1$, $2\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^\alpha} a_k = \alpha + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}(a_k + a_{k+2}) + o(1)$
Or $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha(n+1)}$ converge par application de critère spécial des séries alternées (car $n \mapsto \frac{1}{n^\alpha(n+1)}$ décroît vers 0 pour n assez grand) donc $\sum u_n(x)$converge.
d) Puisque $a_n + a_{n+2} = \frac{1}{n+1}$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}x^n + a_n x^n = -\frac{\ln(1-x)}{x}$$

On en déduit

$$f(x) + \frac{f(x) - \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}x}{x^2} = -\frac{\ln(1-x)}{x}$$

puis

$$f(x) = \frac{-x\ln(1-x) + \frac{\pi}{4} + x\frac{\ln 2}{2}}{x^2+1}$$

Exercice 62 : [énoncé]
a) On a

$$|a_n| = \frac{1}{n!}\int_0^1 t\prod_{k=1}^{n-1}(k-t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^1 \prod_{k=1}^{n-1} k\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}$$

donc $R \geqslant 1$.

$$|a_n| \geqslant \frac{1}{n!}\int_0^1 t(1-t)\times\prod_{k=2}^{n-1}(k-1)\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{4n(n-1)}$$

donc $R \leqslant 1$. Finalement $R = 1$.

b) Soit $x \in \left]-1,1\right[$.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(t-k)x^n\mathrm{d}t$$

or par convergence uniforme de la suite de fonctions de la variable t sur $[0,1]$ (convergence uniforme obtenue par convergence normale grâce à $|x| < 1$) on peut permuter somme et intégrale.

$$S(x) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(t-k)x^n\mathrm{d}t = \int_0^1 (1+x)^t\mathrm{d}t = \left[\frac{(1+x)^t}{\ln(1+x)}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{x}{\ln(1+x)}$$

Exercice 63 : [énoncé]
A l'aide d'une intégration par partie :
$a_{n+1} = 2(n+1)\int_0^1 t^2(1-t^2)^n\mathrm{d}t = 2(n+1)(a_n - a_{n+1})$ donc $a_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}a_n$.
$a_n \neq 0$ et $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 1$ donc $R = 1$.
Pour $x \in \left]-1,1\right[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 ((1-t^2)x)^n\mathrm{d}t$.
On peut permuter somme infinie et intégrale (par un argument de convergence uniforme par exemple) et affirmer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-x+xt^2}$.
Pour $x = 0$: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1$.
Pour $x > 0$: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\frac{1-x}{x}+t^2} = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\arctan\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)$.
Pour $x < 0$: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2-\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x(x-1)}}\operatorname{argth}\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}}\right)$.

Exercice 64 : [énoncé]
a) On calcule S_1

```
sum(1/(4*n+1)/(4*n+3),n=0..infinity);
```

On obtient $S_1 = \pi/8$. On calcule S_2

```
sum((-1)^n/(4*n+1)/(4*n+3),n=0..infinity);
```

L'expression obtenue est une expression de

```
hypergeom
```

.
b) $a_n \sim (-1)^n/16n^2$ donc $R = 1$.

c) En considérant les séries entières dérivées $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{4n+1} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+3}}{4n+3} = \int_0^x \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{1+t^4}$.

d) Par un argument de convergence uniforme sur le segment $[0,1]$, on obtient $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+3} = \int_0^1 \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{1+t^4}$

Par décomposition en éléments simples, $\frac{1}{(4n+1)(4n+3)} = \frac{1/2}{4n+1} - \frac{1/2}{4n+3}$.

On en déduit $S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$.

On calcule cette intégrale

```
int((1-t^2)/(1+t^4),t=0..1);
```

On obtient $S_2 = \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$.

Par une évaluation numérique via l'instruction

```
evalf
```

, on peut observer l'exactitude de cette formule.

Exercice 65 : [énoncé]

a) On obtient la décomposition en éléments simples par

```
convert(1/(1-X^6),parfrac,X);
```

```
b)
```

On peut calculer l'intégrale par

```
int(1/(1-t^6),t=0..x);
```

Le résultat obtenu est cependant décevant car présente un nombre complexe et un logarithme calculé sur un réel strictement négatif.

En décomposant le calcul par la décomposition en éléments simples précédente et en isolant le problème ci-dessus, on obtient

$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^6} = \frac{1}{6}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$.

c) Posons $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{6n+1}$. On a $(xS(x^6))' = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{6n} = \frac{1}{1-x^6}$ sur $]-1,1[$.

donc $S(x) = \frac{1}{\sqrt[6]{x}} \int_0^{\sqrt[6]{x}} \frac{\mathrm{d}t}{1-t^6}$ pour $x \in]0,1[$.

d) En écrivant $\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{6n+1} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (-1)^n t^{6n}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^6} + (-1)^N \int_0^1 \frac{t^{6(N+1)}}{1+t^6}\,\mathrm{d}t$

avec $0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{6(N+1)}}{1+t^6}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{6(N+1)}\,\mathrm{d}t \to 0$, on obtient $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{6n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^6}$.

On obtient la valeur de cette intégrale en écrivant

```
int(1/(1+t^6),t=0..1);
```

Exercice 66 : [énoncé]

Pour $x \neq 0$, posons $u_n = \frac{x^{2n+1}}{3n+2}$. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to x^2$ donc $R = 1$.

La fonction somme S est impaire, on se limite alors à $x > 0$.

$\sqrt{x}S(x^{3/2}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{3n+2}$ or $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{3n+2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{3n+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t}{1-t^3}\,\mathrm{d}t$.

donc $S(x) = \frac{1}{x^{4/3}} \int_0^{x^{2/3}} \frac{t}{1-t^3}\,\mathrm{d}t$ et il ne reste plus qu'à décomposer en éléments simples etc.

$S(x) = \frac{1}{6x^{4/3}} \ln \frac{x^{4/3}+x^{2/3}+1}{x^{4/3}-2x^{2/3}+1} - \frac{1}{x^{4/3}\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{2x^{2/3}+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi}{6}\right)$.

Exercice 67 : [énoncé]

a) Posons $a_n = \frac{n!}{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)} \neq 0$. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2n+3} \to \frac{1}{2}$. $R = 2$.

b) On sait que $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(t)\mathrm{d}t = \frac{2^n n!}{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}$ donc

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{x^n}{2^n} \sin^{2n+1}(t)\mathrm{d}t$.

Par convergence uniforme,

$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{x^n}{2^n} \sin^{2n+1}(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} \sin^{2n+1}(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin t}{2-x\sin^2 t}\mathrm{d}t$

Ainsi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{(2-x)+x\cos^2 t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{(2-x)+xu^2}$ puis

si $x>0$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n = \frac{2}{\sqrt{x(2-x)}}\arctan\sqrt{\frac{x}{2-x}}$.
Si $x<0$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n = \frac{2}{\sqrt{-x(2-x)}}\operatorname{argth}\sqrt{\frac{-x}{2-x}}$.

Exercice 68 : [énoncé]
a) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ donc $\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$ pour $x\neq 0$.
Or $x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, cela permet de conclure.
b) Un raisonnement semblable, permet d'établir que $x\mapsto \frac{\mathrm{e}^x-1}{x}$ se prolonge en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ ne s'annulant pas. Par opération le prolongement continue de $x\mapsto \frac{\sin x}{\mathrm{e}^x-1} = \frac{\sin x}{x}\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}$ est $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 69 : [énoncé]
Pour tout $t\in[0,1[$ on sait : $\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n$ donc aussi $\frac{1}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{na}$.
Soit F une primitive de la fonction continue $t\mapsto\frac{1}{1+t^a}$ sur $[0,1]$.
Sur $[0,1[$, $F(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^{na+1}}{na+1} + F(0)$.
Or F est continue sur $[0,1]$ et la série de fonctions convergence uniformément sur $[0,1]$.
Par passage à la limite en 1, $F(1) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{na+1} + F(0)$.
Par suite $\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^a} = F(1)-F(0) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{na+1}$.
On en déduit $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 70 : [énoncé]
$\frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{n}$ avec une convergence uniforme sur $[0,1]$ par majoration du reste d'une série vérifiant le critère spécial. On a alors
$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1\frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{n}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$. On peut montrer que cela vaut $\pi^2/12$.

Exercice 71 : [énoncé]
$\frac{\arctan x}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$ avec une convergence uniforme sur $[0,1]$ par majoration du reste d'une série vérifiant le critère spécial.
$\int_0^1\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$. On ne sait pas exprimer cette valeur à l'aide des constantes usuelles, on l'appelle nombre de Catalan.

Exercice 72 : [énoncé]
$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ avec convergence uniforme sur $[0,1]$ par majoration du reste d'une série vérifiant le critère spécial.
$\int_0^1\arctan x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.
Par intégration par parties, $\int_0^1\arctan x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}$.

Exercice 73 : [énoncé]
a) En intégrant le développement en série entière de sa dérivée, on obtient

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}x^{2n+1}$$

avec un rayon de convergence $R=1$.
Par la formule de Stirling

$$\frac{1}{2n+1}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

ce qui assure la convergence normale de la série de fonctions sur $[-1,1]$.
b) D'une part

$$\int_0^{\pi/2}\arcsin(\sin(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}$$

D'autre part, en intégrant terme à terme

$$\int_0^{\pi/2}\arcsin(\sin(t))\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t$$

car il y a convergence normale de la série de fonctions sur $[0,\pi/2]$.

On connaît l'intégrale de Wallis

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

et on obtient donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Or

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

donc

$$\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

puis

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 74 : [énoncé]
$\ln(1+u) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}u^k}{k}$ avec convergence normale sur $[-|x|, |x|]$ donc
$\ln(1+x\sin^2 t) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k \sin^{2k} t}{k}$ avec convergence normale sur $[0, \pi/2]$. Par suite $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+x\sin^2 t)}{\sin^2 t}\mathrm{d}t = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^{2k}}{k} I_{k-1}$ avec $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t\mathrm{d}t = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}$
puis $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+x\sin^2 t)}{\sin^2 t}\mathrm{d}t = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^{2k}}{k}\frac{(2k-2)!}{(2^{k-1}(k-1)!)^2}\frac{\pi}{2}$. Or
$\sqrt{1+u} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \binom{1/2}{k} x^k$ avec $\binom{1/2}{k} = \frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{2^{2k-1}k((k-1)!)^2}$ d'où
$\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+x\sin^2 t)}{\sin^2 t}\mathrm{d}t = \pi(\sqrt{1+x}-1)$.

Exercice 75 : [énoncé]
a) Par télescopage

$$\sum_{n=1}^{N} \left[\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln(N+1)$$

Or

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + o(1)$$

donc

$$\sum_{n=1}^{N} \left[\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] \to \gamma$$

b) Puisque

$$\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\frac{1}{n^k}$$

on obtient

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\frac{1}{n^k}$$

or

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^k}{k}\frac{1}{n^k}\right| \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^k} \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} < +\infty$$

donc on peut appliquer le théorème d'échange de Fubini et affirmer

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}(\zeta(k)-1)$$

et enfin

$$\gamma = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}(\zeta(k)-1) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\zeta(k)$$

Exercice 76 : [énoncé]
a) Pour $|x| < 1$, $\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$. Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec
$a_n = \mathrm{Card}\left\{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2 / k + 2\ell = n\right\} = \lfloor n/2 \rfloor + 1$.
b) Analyse :
Introduisons la série entière $\sum u_n x^n$ de somme S et de rayon de convergence R.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3}x^{n+3} = u_{n+2}x^{n+3} + u_{n+1}x^{n+3} - u_n x^{n+3}$.
En sommant, on obtient pour $|x| < R$,
$S(x) - \left(u_0 + u_1 x + u_2 x^2\right) = x\left(S(x) - u_0 - u_1 x\right) + x^2\left(S(x) - u_0\right) - x^3 S(x)$.

On en déduit $S(x) = u_0\frac{(1-x-x^2)}{(1-x)(1-x^2)} + u_1\frac{x}{1-x^2} + u_2\frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)}$.
Synthèse : Considérons la fonction $f : x \mapsto u_0\frac{(1-x-x^2)}{(1-x)(1-x^2)} + u_1\frac{x}{1-x^2} + u_2\frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)}$.
f est une fonction rationnelle donc 0 n'est pas pôle, elle est développable en série entière sur $]-1,1[$.
Puisque cette fonction vérifie la relation
$f(x) - \left(u_0 + u_1x + u_2x^2\right) = x\left(f(x) - u_0 - u_1x\right) + x^2\left(f(x) - u_0\right) - x^3f(x)$, les coefficients u_n de son développement en séries entières vérifient :
$\forall x \in \left]-1,1\right[, \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (u_{n+2} + u_{n+1} - u_n)x^{n+3}$.
Par identification des coefficients de séries entières de sommes égales sur $]-1,1[$, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} - u_n$.
Ceci détermine alors entièrement la suite (u_n) moyennant la connaissance des coefficients u_0, u_1, u_2.
Pour exprimer u_n, il ne reste plus qu'à former le développement en série entière de f.
$\frac{(1-x-x^2)}{(1-x)(1-x^2)} = 1 - \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)} = 1 - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_nx^{n+3}$, $\frac{x}{1-x^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{2n+1}$
et $\frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_nx^{n+2}$.
En déduit que pour $n \geqslant 3$, $u_n = -u_0a_{n-3} + u_1\varepsilon_n + u_2a_{n-1}$ avec $\varepsilon_n = 1$ si n est impair et 0 sinon.

Exercice 77 : [énoncé]
a) Si la série entière S est de rayon de convergence $R > 0$, alors pour tout $x \in \left]-R,R\right[$ on a

$$S(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^{n+1} = 1 + x\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_ka_{n-k}x^n$$

Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, on obtient

$$S(x) = 1 + xS^2(x)$$

b) Pour $x \neq 0$, on obtient, après résolution

$$S(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x} \text{ pour } x < 1/4$$

Posons $\varepsilon(x)$ tel que

$$S(x) = \frac{1 + \varepsilon(x)\sqrt{1-4x}}{2x}$$

On a

$$\varepsilon(x) = \frac{2xS(x) - 1}{\sqrt{1-4x}}$$

La fonction ε est continue sur $\left]-R,0\right[\cup \left]0, \min(R,1/4)\right[$ et ne prend que les valeurs -1 ou 1. On en déduit que cette fonction ε est constante et puisque S converge quand $x \to 0^{+/-}$, on peut affirmer que ε est constante égale à -1 car négative au voisinage de 0.
Finalement

$$S(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \text{ et } S(0) = 1$$

c) Après développement en série entière de $\sqrt{1-4x}$, on obtient

$$\frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_nx^n$$

avec

$$b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

et $R = 1/4$.
Puisque la fonction

$$T : x \mapsto \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

vérifie l'équation $xT^2(x) = T(x) - 1$, la reprise des calculs précédents (sachant $R > 0$) assure que les coefficients b_n vérifient

$$b_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} b_{n-k}b_k$$

On en déduit $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car les conditions qui précèdent déterminent une suite de façon unique.
d) Par la formule de Stirling

$$a_n \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi}n^{3/2}}$$

Exercice 78 : [énoncé]
a) $N(n,p) = \binom{n}{p} D(n-p)$.
b) $D(n) \leqslant n!$ donc $\left|\frac{D(n)}{n!}\right| \leqslant 1$ qui implique $R \geqslant 1$.

On a $\sum_{p=0}^{n} N(n,p) = n!$ donc $\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!(n-p)!} D(n-p) = 1$ d'où par produit de Cauchy
$\mathrm{e}^x f(x) = \frac{1}{1-x}$ puis $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}$.
c) $\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^n$ donc $D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ puis $N(n,p) = \frac{n!}{p!} \sum_{k=0}^{n-p} \frac{(-1)^k}{k!}$.
d) $\frac{1}{n!} N(n,p) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{p!\mathrm{e}}$.

Exercice 79 : [énoncé]
a) Une involution de $\{1,\dots,n\}$ peut fixer l'élément n ou non.
Il y a exactement I_{n-1} involutions de $\{1,\dots,n\}$ fixant n.
Si une involution ne fixe pas n, elle l'échange avec un autre élément a de $\{1,\dots,n-1\}$. Il y a $n-1$ valeurs possibles pour a, l'involution alors obtenue envoyant n sur a et a sur n réalise aussi par restriction une involution sur $\{1,\dots,n\} \setminus \{a,n\}$: il y en a exactement $(n-1)I_{n-2}$.
Au final, on obtient $I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$.
b) Une involution est bijective donc $I_n \leqslant n!$. Puisque $\frac{I_n}{n!} = O(1)$, on a $R \geqslant 1$.
c) $(1+x)S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_{n-1}}{(n-1)!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n - nI_{n-1}}{n!} x^n =$
$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_{n+1}}{n!} x^n = S'(x)$.
d) La résolution de l'équation différentielle linéaire, sachant $S(0) = 1$, donne $S(x) = \mathrm{e}^{x + \frac{1}{2}x^2}$.
Or $\mathrm{e}^{x+\frac{1}{2}x^2} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$ donne
$I_{2p} = \sum_{k=0}^{p} \frac{(2p)!}{2^{(p-k)}(p-k)!(2k)!}$ et $I_{2p+1} = \sum_{k=0}^{p} \frac{(2p+1)!}{2^{(p-k)}(p-k)!(2k+1)!}$.

Exercice 80 : [énoncé]
Posons $b_n = \frac{a_n}{n!}$, on a $b_0 = 1$ et $(n+1)b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} b_{n-k} b_k$. Notons S la somme de la série entière $\sum b_n x^n$ et posons R son rayon de convergence. Par récurrence, on peut affirmer $|b_n| \leqslant 1$ et donc $R > 0$. Sur $]-R,R[$, la relation précédente donne a $S'(x) = S^2(x)$. Après résolution, sachant que $S(0) = 1$, on obtient $S(x) = \frac{1}{1-x}$ d'où l'on tire $a_n = n!$.

Exercice 81 : [énoncé]
a) En posant $Y = X - 1$,
$$\frac{1}{(X+1)^m (X-1)^n} = \frac{1}{Y^n (Y+2)^m}$$
Pour $Y \in]-1/2, 1/2[$,
$$\frac{1}{(Y+2)^m} = \frac{1}{2^m} \frac{1}{\left(1+\frac{Y}{2}\right)^m} = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-m(-m-1)\dots(-m-k+1)}{k!} \frac{Y^k}{2^k}$$
Après simplifications
$$\frac{1}{(Y+2)^m} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{m+k}} \binom{m+k-1}{k} Y^k$$
On en déduit que la partie polaire relative au pôle 1 est
$$\frac{a_0}{(X-1)^n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{X-1} = \frac{a_0}{Y^n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{Y}$$
avec
$$a_k = \frac{(-1)^k}{2^{m+k}} \binom{m+k-1}{k}$$
De même, en posant $Z = X + 1$, la partie polaire relative au pôle -1 est
$$\frac{b_0}{(X+1)^m} + \dots + \frac{b_{m-1}}{X+1} = \frac{b_0}{Z^m} + \dots + \frac{b_{m-1}}{Z}$$
avec
$$b_k = \frac{(-1)^n}{2^{n+k}} \binom{n+k-1}{k}$$
Enfin, puisque de partie entière nulle, la fraction rationnelle étudiée est la somme des deux parties polaires proposées.
b) En réduisant chaque partie polaire au même dénominateur, on obtient
$$\frac{1}{(X+1)^m (X-1)^n} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k (X-1)^k}{(X-1)^n} + \frac{\sum_{k=0}^{m-1} b_k (X+1)^k}{(X+1)^m}$$
Par conséquent, on posant
$$U(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (X-1)^k \text{ et } V(X) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k (X+1)^k$$
la poursuite de la réduction au même dénominateur du calcul précédent donne
$$(X+1)^m U(X) + (X-1)^n V(X) = 1$$

Exercice 82 : [énoncé]
a) Soit $\rho \in]0, R[$. La suite $(a_n \rho^n)$ est bornée puisque $|\rho| < R$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{a_n}{n!} = a_n \rho^n \frac{1}{n!}\left(\frac{z}{\rho}\right)^n = O\left(\frac{1}{n!}\left(\frac{z}{\rho}\right)^n\right)$$

or, la série numérique exponentielle

$$\sum \frac{1}{n!}\left(\frac{z}{\rho}\right)^n$$

est absolument convergente donc, par comparaison, la série numérique $\sum a_n z^n$est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$.
Le rayon de convergence de la série entière étudiée est $+\infty$.
b) On a

$$f(t)\mathrm{e}^{-xt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n \mathrm{e}^{-xt} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \text{ avec } f_n(t) = \frac{a_n}{n!} t^n \mathrm{e}^{-xt}$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
Les fonctions f_n et la fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ sont continues par morceaux sur $[0, +\infty[$.
Les fonctions f_n sont intégrables sur $[0, +\infty[$ car $t^2 f_n(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ et

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| \,\mathrm{d}t = \frac{|a_n|}{n!} \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-xt} \,\mathrm{d}t$$

Par intégration par parties généralisées successives

$$\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-xt} \,\mathrm{d}t = \frac{n!}{x^{n+1}}$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| \,\mathrm{d}t = \frac{|a_n|}{x^{n+1}}$$

Si $x > 1/R$ alors la série $\sum |a_n|/x^{n+1}$ est convergente et, par le théorème de Fubini, on peut affirmer que la fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable et

$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt} \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{x^{n+1}}$$

Exercice 83 : [énoncé]
a) On définit a et les éléments de la suite de fonctions

```
a:=1/2;
f:=(n,x)->product(1/(1-a^i*x),i=1..n);
```

On trace les graphes souhaités en prenant soin de fixer l'échelle en y

```
plot([seq(f(k,x),k=1..10)],x=-3..2,-2..5,color=red);
```

Il semble y avoir convergence de la suite avec croissance pour $x \geqslant 0$ et décroissance pour $x \leqslant 0$
b) f_{100} est développable en série entière sur $]-1/a, 1/a[$ en tant que produit de fonctions qui le sont.
Les coefficients de son développement en série entière sont les coefficients de son développement de Taylor.
Malheureusement un calcul explicite par les instructions

```
series
```

ou

```
taylor
```

n'est pas possible pour résoudre cette question. Inspiré par l'étude qui suit, considérons $f_{100}(ax)$. On a

$$f_{100}(ax) = \prod_{i=1}^{100} \frac{1}{1 - a^{i+1}x} = \prod_{i=2}^{101} \frac{1}{1 - a^i x}$$

Ainsi

$$f_{100}(ax) = \frac{1 - ax}{1 - a^{101}x} f_{100}(x)$$

puis

$$(1 - a^{101}x) f_{100}(ax) = (1 - ax) f_{100}(x)$$

En introduisant la suites α_n des coefficients du développement en série entière de f_{100}, la relation qui précède donne

$$\alpha_n a^n - a^{101} a^{n-1} \alpha_{n-1} = \alpha_n - a\alpha_{n-1} \text{ avec } \alpha_0 = 1$$

On en déduit

$$\alpha_n = \frac{a - a^{n+100}}{1 - a^n} \alpha_{n-1}$$

Un calcul des coefficients α_n est dès lors possible, par exemple par récursivité

```
alpha:=proc(n)
if n=0 then RETURN(1)
else
RETURN((a-a^(n+100))/(1-a^n)*alpha(n-1))
fi;
end:
```

c) Soit $x \in I$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $a^n x < 1$, on peut considérer

$$\ln\left(\prod_{i=1}^N \frac{1}{1-a^i x}\right) = \sum_{i=1}^N -\ln\left(1-a^i x\right)$$

Puisque $a^i x \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0$, on a $-\ln\left(1-a^i x\right) \sim a^i x$ et puisque la série $\sum a^i$ converge, par équivalence de série à terme positifs, on peut affirmer la convergence de la suite de terme général

$$\sum_{i=1}^N -\ln\left(1-a^i x\right)$$

On en déduit la convergence de

$$\prod_{i=1}^N \frac{1}{1-a^i x}$$

Ainsi la suite des fonctions f_n converge simplement sur I.
Puisque $f_n(ax) = (1-ax)f_{n+1}(x)$, on obtient à la limite

$$f(ax) = (1-ax)f(x)$$

d) Soit $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

$$g(0) = 1 \text{ et } \forall x \in I, g(ax) = (1-ax)g(x)$$

Si cette fonction est continue au voisinage de 0 alors la relation

$$g(x) = \frac{g(ax)}{1-ax}$$

donne par itération

$$g(x) = f_n(x)g(a^n x)$$

et donc par passage à limite $g(x) = f(x)$ d'où l'unicité d'une telle fonction.
Pour déterminer une solution développable en série entière, procédons par analyse synthèse.

Analyse :
Supposons que g est au voisinage de 0 égal à la somme d'une série entière $\sum \alpha_n x^n$ de rayon de convergence > 0. $g(0) = 1$ donne $\alpha_0 = 1$ et la relation
$g(ax) = (1-ax)g(x)$ donne $\alpha_n a^n = \alpha_n - a\alpha_{n-1}$.
Ainsi la suite (α_n) est déterminée par

$$\alpha_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = \frac{a}{1-a^n}\alpha_{n-1}$$

Synthèse :
Soit (α_n) la suite déterminée comme ci-dessus. Par la règle de d'Alembert, on peut affirmer que la série entière $\sum \alpha_n x^n$ est de rayon de convergence $R = 1/a$.
De plus, par les calculs ci-dessus sa somme S vérifie $S(0) = 1$ et
$S(ax) = (1-ax)S(x)$ sur $]-1/a, 1/a[$.
En reprenant l'étude d'unicité qui précède, on peut affirmer que S est égale à f sur $]-1/a, 1/a[$.
e) Ce qui précède vient de donner que f est développable en série entière ainsi qu'une relation permettant de calculer les coefficients de ce développement

```
alpha:=proc(n)
if n=0 then RETURN(1)
else
RETURN(a)/(1-a^n)*alpha(n-1))
fi;
end:
```

Exercice 84 : [énoncé]
a)

$$u_n = \frac{n}{n+1}f(1) + \int_0^1 nt^n\left(f(t)-f(1)\right)\,\mathrm{d}t$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $t \in [1-\alpha, 1]$, $|f(t)-f(1)| \leqslant \varepsilon$.
On a alors

$$\left|\int_0^1 nt^n\left(f(t)-f(1)\right)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\left\|f\right\|_\infty \int_0^{1-\alpha} nt^n\,\mathrm{d}t + \varepsilon$$

Or $\int_0^{1-\alpha} nt^n\,\mathrm{d}t = \frac{n}{n+1}(1-\alpha)^{n+1} \to 0$ donc pour n assez grand

$$\left|\int_0^1 nt^n\left(f(t)-f(1)\right)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\varepsilon$$

Ainsi $u_n \to f(1)$.

On peut aussi procéder au changement de variable $u = t^n$.
b) On a

$$n\ln(1+t^n)f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}nt^{nk}f(t)$$

Or

$$\int_0^1 \left|t^{nk}f(t)\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{nk+1}$$

donc par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues,

$$\int_0^1 n\ln(1+t^n)f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\int_0^1 (nk)t^{nk}f(t)\,\mathrm{d}t$$

Puisque $\int_0^1 (nk)t^{nk}f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)$, on étudie

$$\int_0^1 n\ln(1+t^n)f(t)\,\mathrm{d}t - f(1)\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\left(\int_0^1 (nk)t^{nk}f(t)\,\mathrm{d}t - f(1)\right)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par l'étude qui précède, on a pour n assez grand

$$\left|\forall k\in\mathbb{N}^\star, \int_0^1 (nk)t^{nk}\left(f(t)-f(1)\right)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\varepsilon$$

et donc

$$\left|\int_0^1 n\ln(1+t^n)f(t)\,\mathrm{d}t - f(1)\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\right| = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\varepsilon$$

On peut ainsi affirmer

$$v_n \to f(1)\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2 f(1)}{12}$$

Exercice 85 : [énoncé]
Par développement en série entière

$$\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t = \int_{[0,1[}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}t^{nk}\,\mathrm{d}t$$

Pour $n \geqslant 1$, il y a convergence de la série des intégrales des valeurs absolues donc on peut donc intégrer terme à terme par le théorème de Fubini

$$\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k(nk+1)}$$

On a alors

$$n\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k(nk+1)} - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2(nk+1)}$$

avec

$$\left|\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2(nk+1)}\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \to 0$$

donc

$$n\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t \to \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$$

avec

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

car on sait

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 86 : [énoncé]
Soit

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n+2}}{3n+2}$$

somme de série entière définie sur $]-1,1[$.

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}x^{3n+1} = \frac{x}{1-x^3}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n+2)\times 3^n} = \sqrt[3]{9}S\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right) = \sqrt[3]{9}\int_0^{1/\sqrt[3]{3}}\frac{t\mathrm{d}t}{1-t^3}$$

ce qui donne un résultat assez monstrueux :

$$9^{(1/3)}(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\arctan((\frac{2}{9}3^{(2/3)}+\frac{1}{3})\sqrt{3})+\frac{1}{6}\ln(3)+\frac{1}{6}\ln(3+3^{(1/3)}+3^{(2/3)})-\frac{1}{3}\ln(-3^{(2/3)}+3)+$$

fourni par Maple.

Exercice 87 : [énoncé]
a) On a

$$\binom{n+p}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} \sim \frac{1}{p!}n^p$$

donc le rayon de convergence de f vaut 1.
b) Sur $]-1,1[$ f est $\mathcal{C}^\infty$ et

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n+p}{p} nx^{n-1}$$

Donc

$$(1-x)f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\binom{n+p+1}{p} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n\binom{n+p}{p} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n$$

avec

$$\alpha_n = (n+1)\binom{n+p+1}{p} - n\binom{n+p}{p}$$

qui donne

$$\alpha_n = (n+p+1)\binom{n+p}{p} - n\binom{n+p}{p} = (p+1)\binom{n+p}{p}$$

Par suite

$$(1-x)f'(x) = (p+1)f(x)$$

Les solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$(1-x)y' = (p+1)y$$

sur $]-1,1[$ sont

$$y(x) = \frac{C}{(1-x)^{p+1}}$$

avec $C \in \mathbb{R}$.
Sachant $f(0) = 1$, on obtient

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^{p+1}}$$

Exercice 88 : [énoncé]
a) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et par suite $x \mapsto \arcsin x$ l'est aussi. Par produit de fonctions développable en série entière sur $]-1,1[$, f l'est aussi.
b) f est dérivable sur $]-1,1[$ et $f'(x) = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$ donc $(1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1$.
c) Puisque f est impaire, le développement en série entière de f est de la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$. On a $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)a_n x^{2n}$ puis

$$(1-x^2)f'(x) - xf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)a_n x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)a_n x^{2n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+2}$$

puis $(1-x^2)f'(x) - xf(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} ((2n+3)a_{n+1} - (2n+2)a_n)x^{2n+2} = 1$
Donc $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}a_n$ d'où $a_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.
$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{4(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)} \to 1$ donc $R = 1$.

Exercice 89 : [énoncé]
f admet un développement en série entière en 0 par produit fonctions développables en série entière.
De plus son rayon de convergence vérifie $R \geqslant 1$.
On peut donc écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ sur }]-1,1[$$

f est dérivable et f est solution de l'équation différentielle

$$(x^2-1)y' + xy - 1 = 0$$

Or

$$(x^2-1)f'(x) + xf(x) - 1 = -(a_1+1) + \sum_{n=1}^{+\infty} (na_{n-1} - (n+1)a_{n+1})\, x^n$$

Par identification

$$a_1 = -1 \text{ et } \forall n \geqslant 1, a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_{n-1}$$

De plus $a_0 = f(0) = \pi/2$ donc

$$a_{2p} = \frac{(2p-1)}{2p} \times \dots \times \frac{1}{2}a_0 = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2} \text{ et } a_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1}\cdots\frac{2}{3}a_1 = -\frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$

Exercice 90 : [énoncé]
a) f est solution de l'équation $(1-x^2)y''-xy'+\alpha^2 y=0$.
b) f est solution de l'équation différentielle ci-dessus et vérifie les conditions initiales $y(0)=1$ et $y'(0)=0$.
Analyse : Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$ et de somme S.
La fonction S vérifie sur $]-R,R[$ l'équation différentielle proposée et les conditions initiales imposées si, et seulement si,
$a_0=1, a_1=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}, a_{n+2}=\frac{n^2-\alpha^2}{(n+2)(n+1)}$.
On en déduit que $a_{2p+1}=0$ et $a_{2p}=\frac{(4p^2-\alpha^2)\ldots(4-\alpha^2)}{(2p)!}$.
Soit $\sum a_n x^n$ la série entière déterminée par les coefficients précédemment proposés.
Dans le cas où $\alpha\in 2\mathbb{Z}$, les (a_{2p}) sont nuls à partir d'un certain rang, donc la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence $R=+\infty$.
Dans le cas où $\alpha\notin 2\mathbb{Z}$, pour $x\neq 0$ et $u_p=a_{2p}x^{2p}$, on a $\left|\frac{u_{p+1}}{u_p}\right|\to |x|^2$ donc la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence $R=1$.
Dans les deux cas, les calculs qui précèdent assure que la fonction somme de cette série entière est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y''-xy'+\alpha^2 y=0$ vérifiant $y(0)=1$ et $y'(0)=0$. Par unicité des solutions à un tel problème différentiel, on peut conclure que f est égale à la somme des cette série entière.

Exercice 91 : [énoncé]
Posons $f:x\mapsto \operatorname{sh}(\arcsin x)$
f vérifie l'équation différentielle $(1-x^2)y''-xy'-y=0$ avec les conditions initiales $y(0)=0$ et $y'(0)=1$.
Analyse :
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$ et de somme S.
La fonction S vérifie sur $]-R,R[$l'équation différentielle proposée et les conditions initiales imposées si, et seulement si,
$a_0=0, a_1=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}, a_{n+2}=\frac{n^2+1}{(n+2)(n+1)}a_n$. Ceci donne $a_{2p}=0$ et
$a_{2p+1}=\frac{\prod_{k=1}^{p}\left((2p-1)^2+1\right)}{(2p+1)!}$.
Synthèse :
Soit $\sum a_n x^n$ la série entière déterminée par les coefficients précédemment proposés.
Pour $x\neq 0$ et $u_p=a_{2p+1}x^{2p+1}$; on a $\left|\frac{u_{p+1}}{u_p}\right|\to|x|^2$ donc le rayon de convergence de la série entière étudiée vaut 1. Par les calculs qui précèdent on peut alors affirmer que sa somme S est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y''-xy'-y=0$ vérifiant les conditions initiales $y(0)=0$ et $y'(0)=1$. Par unicité des solutions à un tel problème différentiel, on peut conclure que f est la somme des la série entière introduite sur $]-1,1[$.

Exercice 92 : [énoncé]
$\mathrm{e}^{-x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$, $\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!(2n+1)}x^{2n+1}$ donc
$\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!k!(2k+1)}x^{2n+1}$.
$f'(x)+2xf(x)=1$ donc $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ avec $a_0=0, a_1=1$ et
$(n+2)a_{n+2}+2a_n=0$.
Donc $a_{2n}=0$ et $a_{2n+1}=\frac{-2}{2n+1}a_{2n-1}=\frac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!}$.
Par identification : $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!k!(2k+1)}=\frac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!}$ d'où
$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}=\frac{4^n}{(2n+1)\begin{pmatrix}2n\\n\end{pmatrix}}$ puis la relation voulue.

Exercice 93 : [énoncé]
a) On définit la suite u par une procédure récursive

```
u:=proc(n);
if n<=1 then RETURN(-1) else RETURN((n-1)*u(n-1)-n*u(n-2)) fi
end;
```

Si l'efficacité de cette procédure est discutable (cf. suite de Fibonacci), elle permet de calculer facilement les 10 premiers de la suite (u_n)

```
seq(u(k),k=0..9);
```

b)

On a $u_{n+2}x^n=(n+1)u_{n+1}x^n-nu_nx^n-2u_nx^n$.
En sommant pour n allant de 0 à $+\infty$, on obtient
$\frac{f(x)-(f(0)+f'(0)x)}{x^2}=f'(x)-xf'(x)-2f(x)$
Or $f(0)=u_0$ et $f'(0)=u_1$.

On parvient alors à l'équation différentielle
$x^2(x-1)f'(x)+(2x^2+1)f(x)=-1-x$
On résout cette équation.

```
dsolve(x^2*(x-1)*D(f)(x)+(2*x^2+1)*f(x)=-1-x,f(x));
```

La portion correspondant à la solution générale homogène n'est pas développable en série entière en 0 à cause du terme $\mathrm{e}^{-1/x}$.
On en déduit qu'a priori $f(x)=-\frac{x^2+2x-1}{(x-1)^3}$.
Cette fonction rationnelle dont 0 n'est pas pôle est développable en série entière. Puisqu'elle est solution de l'équation différentielle proposée les coefficients de son développement en série entière vérifie la relation de récurrence proposée ainsi que les conditions initiales imposées.
On peut aussi corroborer l'exactitude du développement par

```
series(-(x^2+2*x-1)/(x-1)^3,x=0,10);
```

c) On pose $v_n=\frac{u_n}{n!}$ et on vérifie
$(n+2)(n+1)v_{n+2}=(n+1)nv_{n+1}+(n+1)v_{n+1}-(n+2)v_n$ ce qui conduit à l'équation différentielle $(1-x)g''(x)-(1-x)g'(x)+2g(x)=0$.
On résout celle-ci

```
dsolve({(1-x)*D(D(g))(x)-(1-x)*D(g)(x)+2*g(x),g(0)=-1,D(g)(0)=-1},g(x));
```

pour obtenir $g(x)=\mathrm{e}^x(x^2-1)$.
Par le même raisonnement que ci-dessus on valide la solution et on peut la corroborer par Maple.